

**Следствие.** В предположениях теоремы 1 для любой функции  $f \in H^2$  существует числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^{1,2}$  такая, что справедливо представление  $f = \sum_{n=1}^\infty x_n K_{\zeta_n}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Partington J. Interpolation, Identification, and Sampling. Oxford :Clarendon Press, 1997.
2. Терехин П. А. Системы представления и проекции базисов // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 6. С. 944–947.
3. Сперанский К. С., Терехин П. А. Фреймовые свойства ядра Сеге в пространстве Харди // Тр. Математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. С. 337–339.

УДК 517.987

## О ПРОДОЛЖЕНИИ КОМПОЗИЦИОННОЙ СУБМЕРЫ ПО ЛЕБЕГУ

**Т. А. Срибная (Самара, Россия)**

sribnayata@mail.ru

При решении задачи о продолжении неаддитивной функции множества наряду с применением общего топологического принципа продолжения по непрерывности (см., например, [1, 2]), используется конструктивный подход ([3, 4]).

В предлагаемой работе для продолжения композиционной субмеры используется лебеговская конструкция продолжения меры ([5], [6]).

Пусть  $T$  — некоторое множество,  $\Sigma$  — некоторый непустой класс подмножеств множества  $T$ ,  $\emptyset \in \Sigma$ ,  $R(\Sigma)$  — кольцо множеств, порожденное классом  $\Sigma$ .

Класс множеств, замкнутый относительно образования разности, будем называть  $t$ -классом.

Будем говорить, что функция множества  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi(\emptyset) = 0$ , — непрерывна в нуле (соответственно, непрерывна сверху в нуле) на  $\Sigma$ , если для любой последовательности множеств  $\{E_n\} \subset \Sigma$ , сходящейся к пустому множеству (соответственно,  $E_n \downarrow \emptyset$ ) справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(E_n) = 0. \quad (1)$$

Будем говорить, что функция множества  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi(\emptyset) = 0$ , — исчерпывающая на  $\Sigma$ , если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств  $\{E_n\} \subset \Sigma$  справедливо соотношение (1).

Пусть  $\mathcal{F} = \{f\}$ ,  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(0) = 0$ , — множество непрерывных, строго возрастающих функций, удовлетворяющих условию  $f(x) \geq x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Монотонную функцию множества  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi(\emptyset) = 0$ , будем называть композиционной субмерой первого рода, если существуют функции  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  такие, что для любых непересекающихся множеств  $A, B \in \Sigma$ , с условием  $A \cup B \in \Sigma$ , справедливо

$$\varphi(A \cup B) \leq f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B);$$

и композиционной субмерой второго рода, если существуют функции  $g, f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  такие, что для любых непересекающихся множеств  $A, B \in \Sigma$ , с условием  $A \cup B \in \Sigma$ , справедливо

$$\varphi(A \cup B) \leq g(f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B)).$$

Если  $f_1(x) = g(x) = x$ ,  $f_2(x) = f(x)$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , то функцию  $\varphi$  будем называть  $f$ -композиционной субмерой.

Пусть  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi(\emptyset) = 0$ ,  $\varphi'(E) = \sup\{\varphi(A), A \subset E, A \in \Sigma\}$ ,  $E \subset T$ , — супремация функции  $\varphi$ .

Пусть  $\Sigma_\sigma$  — класс счетных объединений множеств класса  $\Sigma$ ,  $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$  — наследственное  $\sigma$ -кольцо, порожденное классом  $\Sigma_\sigma$ . Для каждого множества  $E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$  положим

$$\varphi^*(E) = \inf\{\varphi'(F), E \subset F, F \in \Sigma_\sigma\}.$$

Обозначим через  $\Sigma_\varphi$  совокупность множеств  $\sigma$ -кольца  $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ , удовлетворяющих условию:

$$E \in \Sigma_\varphi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists e \in R(\Sigma) : \varphi^*(E \Delta e) < \varepsilon.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi$  — композиционная субмера первого рода, заданная на  $t$ -классе  $\Sigma$ . Пусть субмера  $\varphi$  непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая на  $\Sigma$ . Тогда

- 1)  $\Sigma \subset \Sigma_\varphi$  и функция множества  $\varphi^*$  совпадает с  $\varphi$  на  $\Sigma$ ;
- 2) совокупность множеств  $\Sigma_\varphi$  является  $\sigma$ -кольцом, причём ограничение  $\varphi^*$  на  $\Sigma_\varphi$  является композиционной субмерой второго рода, непрерывной в нуле на  $\Sigma_\varphi$ ;
- 3) если  $\Sigma$  — кольцо множеств, а  $\varphi$  —  $f$ -композиционная субмера на  $\Sigma$ , то  $\varphi^*$  единственная непрерывная в нуле  $f$ -композиционная субмера, являющаяся продолжением  $\varphi$  на  $\sigma$ -кольцо  $\Sigma_\varphi$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусельников Н. С. О продолжении квазилипшицевых функций множества // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 21–31.
2. Савельев Л. Я. Внешние меры и внешние топологии // Сиб. матем. журн. 1983. № 2. С. 133–149.

3. Климкин В. М. Срибная Т. А. Продолжение квазитреугольной субмеры // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 42–48.
4. Срибная Т. А. Продолжение функции множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. 2007. № 6 (56). С. 269–280.
5. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир. 1969. 309 с.
6. Богачев В. И. Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2006. Т. 1. 583 с.

УДК 517.538.52+517.538.53

## ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ<sup>1</sup>

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, М. В. Сидорцов  
(Гомель, Беларусь)

svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Пусть  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$  — произвольные различные действительные числа, а  $n_0 = n, n_1 = \alpha n, n_2 = \beta n$ , где  $n, \alpha, \beta$  — натуральные числа ( $\alpha, \beta$  — фиксированы). Будем рассматривать многочлены  $A_{n_p}^p(z)$ ,  $\deg A_{n_p}^p \leq n_p - 1$ ,  $p = 0, 1, 2$ , хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^2 A_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0+n_1+n_2-1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1)$$

Многочлены  $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^2$  введены Эрмитом [1] в связи с исследованием алгебраической природы числа  $e$ . Согласно современной терминологии (см. [2]) их называют *многочленами Эрмита – Паде 1-го рода (Latin type)* для системы экспоненциальных функций  $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$ . Диагональному случаю соответствует набор параметров, при котором  $n = n_0 = n_1 = n_2$ .

В настоящее время теория многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде (определение аппроксимаций Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода см. в [2, 3]) активно развивается и составляет самостоятельное направление комплексного анализа и теории приближений. Традиционно аппроксимации Эрмита – Паде имеют приложения к теории диофантовых приближений, к задачам приближения аналитических функций и аналитического продолжения. Они оказались полезными в теории несимметричных разностных операторов и в теории случайных матриц.

До недавнего времени в основном изучались свойства диагональных многочленов (подробнее см. [4]). В [5] К. Драйвер и Н. Темме исследовали асимптотику недиагональных квадратичных многочленов Эрмита – Паде

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.