

4. Вуколова Т. М., Дьяченко М. И. О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 22–32.

5. Симонов Б. В. О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Матем. 2013. № 10. С. 24–42.

УДК 517.17+517.51

ОБ ОСНОВНЫХ ПЕРИОДАХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. К. Соколова, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)

98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

Математическое моделирование самоподобных объектов и их свойств, а также различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве, естественным образом приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. В частности, оно возникает в зонной теории твердого тела [1], когда на волновую функцию ψ , описывающую состояние кристалла, накладывают условия Борна – Кармана

$$\psi(\bar{r} + N_i \bar{a}_i) = \psi(\bar{r}), i = 1, \dots, d,$$

где \bar{a}_i — элементарные трансляционные векторы решётки Бравé, d — её размерность, N_i — целые числа. В этих исследованиях предполагается существование у периодической функции $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ базисных периодов \bar{a}_i таких, что любой её период является трансляционным вектором, т. е. линейной комбинацией с целыми коэффициентами периодов \bar{a}_i . Данные условия продиктованы спецификой рассматриваемой задачи и следуют из структуры множества, на котором задана волновая функция, нежели из самого нелокального свойства периодичности.

Известно, что у произвольной периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ не всегда существует основной период. Это имеет место даже в одномерном случае, т. е. при $n = 1$. Примерами таких функций служат постоянная функция, имеющая периодом любое действительное число, индикатор множества \mathbb{Q} рациональных чисел или функция Дирихле с множеством периодов \mathbb{Q} и многие другие. Критерии существования у периодической функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ основного периода авторам работы неизвестно. Достаточные условия доставляет теорема, которая приведена в книгах [2, с. 8] и [3, с. 450].

Теорема 1. *Если периодическая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной, то она имеет основной период.*

Другой более известный факт состоит в том, что, если периодическая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет основной период T_0 , то любой её период T

определяется как $T = kT_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В настоящей работе аналог теоремы 1 доказан для периодических функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданных всюду на \mathbb{R}^n . Введено понятие основного векторного периода в данном направлении и изучена его роль в описании множества всех векторных периодов периодической функции нескольких переменных.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *периодической с периодом \bar{T}* , если существует вектор $\bar{T} \neq \bar{0}$, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$.

Из определения 1 следует, что, если \bar{T}_1 и \bar{T}_2 — периоды функции f , то для любых $k, m \in \mathbb{Z}$ таких, что $k^2 + m^2 \neq 0$, вектор $k\bar{T}_1 + m\bar{T}_2$ также является периодом этой функции.

Рассмотрим n -мерные прямые $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором \bar{T} , где $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$. Эту точку можно выбирать, например, в линейном многообразии $\langle \bar{r}, \bar{T} \rangle = 0$, тогда соответствие $\bar{a} \rightarrow \ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ будет взаимно однозначным. Параметрическое уравнение прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ имеет вид $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{T}$. Здесь и всюду далее $t \in \mathbb{R}$ — переменная, $\bar{T} = |\bar{T}| \bar{T}$. Вдоль каждой такой прямой функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ принимает значения $f(\bar{r})|_{\bar{r} \in \ell_{\bar{T}}(\bar{a})} = f(\bar{a} + t\bar{T})$, т. е. является функцией $g_{\bar{a}}(t) = f(\bar{a} + t\bar{T})$ одной переменной.

Лемма. *Всякая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, периодическая с периодом \bar{T} , является периодической с периодом $|\bar{T}|$ вдоль каждой прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором \bar{T} .*

Для доказательства следует показать периодичность с периодом $|\bar{T}|$ функций $g_{\bar{a}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ периодическая с периодом \bar{T} . Период \bar{T}_0 наименьшего модуля, сонаправленный с вектором \bar{T} , назовем *основным периодом функции f в данном направлении \bar{T}* .

Теорема 2. *Если периодическая с периодом \bar{T} функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$, то она имеет основной период в данном направлении \bar{T} .*

Предположим, что у периодической функции f нет основного периода в направлении \bar{T} , тогда существует её период \bar{S} сколь угодно малого модуля, сонаправленный с \bar{T} . По лемме $|\bar{S}|$ — период функций $g_{\bar{a}}$, при этом хотя бы одна из них, согласно теореме 1, имеет основной период, что противоречит малости $|\bar{S}|$.

Теорема 3. *Если у периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ существует основной период \bar{T}_0 в данном направлении \bar{T} , то любой её период \bar{T} , коллинеарный \bar{T} , имеет вид $\bar{T} = k\bar{T}_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Пусть \bar{T}_0 — основной период периодической функции f в направлении \bar{T} . Предположим, что существует коллинеарный \bar{T} её период

$\bar{S} = \alpha \bar{T}_0$, где $|\alpha| > 1$ и $\alpha \notin \mathbb{Z}$, тогда вектор $\bar{S} - [\alpha] \bar{T}_0$, сонаправленный с $\bar{\mathcal{T}}$, также будет периодом функции f как нетривиальная линейная комбинация её периодов \bar{S} и \bar{T}_0 с целыми коэффициентами, но $|\bar{S} - [\alpha] \bar{T}_0| = \{\alpha\} |\bar{T}_0|$, т. е. его модуль меньше $|\bar{T}_0|$, а это противоречит тому, что \bar{T}_0 — основной период функции f в направлении $\bar{\mathcal{T}}$. Здесь $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначены целая и дробная части числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Пусть множество периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является t -мерной решёткой, порождённой периодами $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$, тогда все эти периоды являются основными в данных направлениях $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$ соответственно.*

Согласно определению из [4, с. 13], t -мерной решёткой называют множество всех возможных нетривиальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами t линейно независимых n -мерных векторов. Пусть $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$ являются периодами функции f , но период \bar{T}_i не является основным в направлениях \bar{T}_i и $-\bar{T}_i$, тогда по теореме 3 его вид $\bar{T}_i = k_i \bar{T}_{0i}$, где \bar{T}_{0i} — основной период функции f в направлении \bar{T}_i , а $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $k_i \neq \pm 1$. Поскольку множество всех периодов функции f является решёткой, то период \bar{T}_{0i} представим нетривиальной линейной комбинацией $\bar{T}_{0i} = \alpha_1 \bar{T}_1 + \alpha_2 \bar{T}_2 + \dots + \alpha_m \bar{T}_m$ векторов $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$ с коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, m$. Справедливо равенство

$$\sum_{j \neq i} k_i \alpha_j \bar{T}_j + (k_i \alpha_i - 1) \bar{T}_i = \bar{0}.$$

В силу линейной независимости векторов $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$, из него следует $k_i \alpha_j = 0$ при всех $j \neq i$, и $k_i \alpha_i = 1$, т. е. $k_i = -1$ или $k_i = 1$, что противоречит исходному предположению о векторе \bar{T}_i . Таким образом, *все базисные векторы решётки периодов данной периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ являются основными в своих направлениях*.

Обратное неверно, т. е. не всякий набор из t линейно независимых основных периодов данной периодической функции f в соответствующих направлениях будет базисом t -мерной решётки её периодов. В качестве примера приведем функцию $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ вида $(x, y, z) \rightarrow \sin x \sin y + z^2$, которая имеет двумерную решётку периодов, порождённую базисными векторными периодами $\bar{T}_1\{\pi; \pi; 0\}$ и $\bar{T}_2\{-\pi; \pi; 0\}$, основными в направлениях $\bar{T}_1\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\}$ и $\bar{T}_2\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\}$. Но пара векторов $\bar{T}_1\{2\pi; 0; 0\}$ и $\bar{T}_2\{0; 2\pi; 0\}$, основных периодов данной функции в направлениях \bar{i} и \bar{j} соответственно, базисными векторами решётки периодов не являются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твёрдого тела. Том 1. М. : Мир, 1979. 400 с.
2. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970. 304 с.

3. Будак Б. М., Фомин С. В. Курс высшей математики и математической физики. Кратные интегралы и ряды. М. : Наука, 1965. 608 с.

4. Скриганов М. М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3–122.

УДК 517.518.87

**К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ
ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ПО
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ**
Ю. С. Солиев (Москва, Россия)
su1951@mail.ru

Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов рассматривалась в работах И. В. Бойкова, Б. Г. Габдулхаева, И. К. Лифанова, А. М. Линькова и их последователей. Некоторый обзор работ по этой тематике содержится в работе [1]. Из зарубежных работ отметим работу [2], где построены квадратурные формулы типа Гаусса для гиперсингулярного интеграла с весовой функцией.

Ниже рассматривается приближенное вычисление гиперсингулярного интеграла [3, 4]

$$Af = A(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt, x \in (-\infty; +\infty), \quad (1)$$

понимаемого в смысле конечной части по Коши–Адамару, где $f(x)$ — плотность интеграла.

Будем придерживаться обозначений классов функций как в работах [5–7].

Пусть $L_n f = L_n(f; x)$ — дробно-рациональная функция, интерполирующая $f(x)$ по узлам

$$x_k = \operatorname{tg}(k\pi/N), \quad k = \overline{[(N-1)/2], n}, \quad n = [N/2], \quad (2)$$

где $[\xi]$ — целая часть числа ξ .

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением $L_n f$ получим квадратурную формулу

$$Af = A(L_n f; x) + R_n f = \frac{1}{N} \sum_{k=-[(N-1)/2]}^n a_k^{(n)}(x) f(x_k) + R_n f, \quad (3)$$