

Результаты расчетов миноров третьего порядка  $A_{i,j,k}$ , где  $i, j, k$  — столбцы из системы  $D$ , можно привести к такому виду:

$$A_{1,2,3} = A_{1,4,5} = -A_{1,3,5} = -\frac{6\sqrt{5}}{25}, \quad A_{1,2,4} = \frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$A_{1,3,4} = \frac{3\sqrt{5}}{25}(\sqrt{3}i + 1), \quad A_{1,3,6} = -A_{1,4,6} = \frac{1}{5}(3 + \sqrt{3}i),$$

$$A_{2,3,4} = A_{3,4,5} = \frac{\sqrt{5}}{25}(3\sqrt{3}i - 7),$$

$$A_{2,3,6} = A_{3,4,6} = A_{4,5,6} = -A_{2,4,6} = -A_{3,5,6} = \frac{1}{5}(-3 + \sqrt{3}i).$$

Миноры третьего порядка:

$$A_{1,2,5} = A_{1,2,6} = A_{1,5,6} = A_{2,3,5} = A_{2,4,5} = A_{2,5,6} = 0.$$

Значит  $\text{spark}(D) \leq 3$ . Рассматривая произвольные пары векторов на линейную зависимость, получим, что любые два вектора в данной системе будут линейно независимы.

$$\text{spark}(D) = 3$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Casazza P. G. Custom building finite frames // Contemporary Math. 2004. Vol. 345. P. 61–86.
2. Alexeev B., Cahill J., Mixon D. J. Full spark frames // Journal of Fourier Analysis and Application. 2012. Vol. 18, № 6. P. 1167-1194.
3. Mixon D. G. Sparse Signal Processing with Frame Theory // PhD. Princeton University. 2012. arXiv:1204.5958v1 [math.FA].
4. Новиков С. Я., Лихобабенко М. А. Фреймы конечномерных пространств // УОП СамГУ. 2013. С.5–24.
5. Mixon D. G. SOFT 2016: Summer of Frame Theory. URL: <http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory> (дата обращения: 15.06.2017).

УДК 517.53

## О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ В КЛАССЕ И. И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ Е. Г. Родикова (Брянск, Россия) evheny@yandex.ru

Пусть  $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость,  $D$  — единичный круг на  $\mathbb{C}$ ,  $H(D)$  — множество всех функций, аналитических в  $D$ . При всех  $0 < q < +\infty$  определим класс И. И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Отметим, что классы  $\Pi_q$  впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [1]. При  $q = 1$  они совпадают с хорошо известным классом Р. Неванлиинны (см. [2]). Исследованию пространств Привалова в случае  $q > 1$  посвящена монография [3]. Случай  $0 < q < 1$  в научной литературе мало изучен.

Справедливы следующие утверждения:

**Теорема 1.** *Если  $f \in \Pi_q$  ( $0 < q < 1$ ), то*

$$\ln^+ M(r, f) = o((1 - r)^{-1/q}), \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (1)$$

$$\text{где } M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

**Теорема 2.** *Если  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  — ряд Тейлора функции  $f(z)$ ,  $f \in \Pi_q$  ( $0 < q < 1$ ), то*

$$\ln^+ |a_k| = o\left(k^{\frac{1}{1+q}}\right), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Пусть  $X$  — некоторый класс аналитических в единичном круге  $D$  функций. Последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$  называется *коэффициентным мультипликатором* из класса  $\Pi_q$  ( $0 < q < +\infty$ ) в класс  $X$ , если  $\forall f \in \Pi_q$ ,  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ , функция  $\Lambda(f)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in X$ .

Обозначается  $CM(\Pi_q, X)$ .

Справедлива

**Теорема 3.** *Пусть  $0 < q < 1$ ,  $0 < p \leq +\infty$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ ,  $H^p$  — класс Харди,  $H^\infty$  — класс ограниченных аналитических функций в  $D$ ,  $A_\alpha^p$  — класс Бергмана:*

$$H^p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty \right\},$$

$$A_\alpha^p := \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r)^\alpha |f(re^{i\theta})|^p d\theta r dr < +\infty \right\}.$$

Для того чтобы  $\Lambda = CM(\Pi_q, X)$ , где  $X = H^p$  ( $0 < p \leq +\infty$ ) или  $X = A_\alpha^p$  ( $p > 0, \alpha > -1$ ), необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{1}{q+1}}\right)\right), \quad c > 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

**Следствие.** *Оценки (1) и (2) не улучшаются.*

*Замечание.* Аналогичные результаты в классах аналитических в круге функций типа Р. Неванлины были получены автором в [4] и [5]. Мультиплекторы из пространств  $\Pi_q$  ( $q > 1$ ) в классы Харди  $H^p$  ( $p > 0$ ) описаны в [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. 206 с.
2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.
3. *Гаврилов В. И., Субботин А. В., Ефимов Д. А.* Граничные свойства аналитических функций ( дальнейший вклад). М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012. 264 с.
4. *Родикова Е. Г.* Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводской междунар. конф. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУб 2012. С. 64–69.
5. *Родикова Е. Г.* О коэффициентных мультиплекторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций // Вестн. Брянск. гос. ун-та. Сер. Точные и естественные науки. 2012. № 4. С. 61–69.

УДК 517.9

**О  $S_\infty$  СИСТЕМАХ**  
**А. И. Рубинштейн (Москва, Россия)**  
rubinstein\_aleksandr@mail.ru

Система  $\{\varphi_k(x)\}$  определенных на  $[0, 1]$  функций называется *слабо мультипликативной*, если для любых номеров  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s$ ,  $s \geq 2$

$$\int_0^1 \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \dots \varphi_{k_s}(x) dx = 0 \quad (1)$$

(см. работу В. Ф. Гапошкина [1]). При  $s = 2$  из (1) следует ортогональность системы  $\{\varphi_k(x)\}$ . Будем считать функции  $\varphi_k(x)$  нормированными в  $L_2(0, 1)$ .

В [1] для ортонормальных слабо мультипликативных систем доказано неравенство Хинчина: при любом  $2 < p < \infty$

$$\left( \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq A_p \left( \sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

ОНС, удовлетворяющие (2) при любом  $2 < p < \infty$  и называются  $S_\infty$  системами.

А. Я. Хинчин установил (2) для первой  $S_\infty$  системы — системы Радемахера

$$r_k(x) = \operatorname{sgn} \sin(2^k \pi x), \quad k = 1, 2, \dots.$$