

РАВНОМЕРНЫЕ РАВНОУГОЛЬНЫЕ ФРЕЙМЫ С ПОЛНЫМ И НЕПОЛНЫМ СПАРКОМ

Д. А. Рогач (Самара, Россия)

ida@ssau.ru

Фреймы находят широкое применение в цифровой обработке сигналов. Весьма перспективным представляется применение фреймов для решения дискретной фазовой проблемы.

Пусть $\mathbb{H}^N = \mathbb{R}^N$ ($\mathbb{H}^N = \mathbb{C}^N$) — евклидово (унитарное) конечномерное пространство со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^N x_n y_n \quad (\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^N x_n \overline{y_n}).$$

Определение 1. Набор элементов $F = \{f_m, m = 1, \dots, M\} \subset \mathbb{H}^N$ называется *фреймом для пространства \mathbb{H}^N* , если существуют положительные числа A и B такие, что для любого $x \in \mathbb{H}^N$

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{m=1}^M |\langle x, f_m \rangle|^2 \leq B\|x\|^2. \quad (1)$$

Определение 2. Фрейм $\{f_m\}_{m=1}^M$ будем называть *равномерным*, если существует число β такое, что $\|f_m\| = \beta$ для любого $m = 1, \dots, M$.

Пусть система векторов $\{f_m\}_{m=1}^M \in \mathbb{H}^N$, удовлетворяет условиям:

- 1) $\|f_m\| = 1$, для $m = 1, \dots, M$;
 - 2) существует $c \neq 0$ такое, что $|\langle f_i, f_j \rangle| = c$, для $i \neq j = 1, \dots, M$,
- тогда данную систему будем называть *жестким равноугольным фреймом*.

В пространстве \mathbb{H}^N рассмотрим оператор синтеза V^* , представимый в виде матрицы, в которой столбцы-векторы из фрейма F .

Введем понятие спарка.

Определение 2.

$$\text{spark}(F) = \min\{\|x\|_0 : V^*x = 0, x \neq 0\}, \quad (2)$$

где $\|x\|_0$ — обозначение количества ненулевых координат вектора x .

Иными словами, спарк — это размер минимальной линейно зависимой системы в матрице V^* размерности $N \times M$.

Из определения получим:

– $\text{spark}(\{e_n\}_{n=1}^N) = 0$, где $\{e_n\}_{n=1}^N$ — базис в \mathbb{H}^N ;

- если в матрице V^* содержится ноль-столбец, то $\text{spark}(F) \geq 1$;
- для любой $M \times N$ матрицы F $0 \leq \text{spark}(F) \leq M + 1$.
- если $\text{spark}(F) = N + 1$, то говорят, что система $\{f_m\}_{m=1}^M$ имеет полный спарк.

Из работы [3] нам известна следующая теорема:

Теорема 1. *Всякий фрейм $F = \{f_m\}_{m=1}^M$ с полным спарком в \mathbb{R}^N , где $M \geq 2N - 1$, удовлетворяет свойству альтернативной полноты.*

Таким образом, мы получили, что фрейм с полным спарком, содержащий, по крайней мере, $2N - 1$ векторов, удовлетворяет свойству альтернативной полноты.

Естественно возникло предположение, что равномерные равноугольные фреймы имеют полный спарк.

Пример 1. Пусть нам дана система векторов G . Непосредственно проверяется, что она является равноугольным и равномерным фреймом.

$$G = \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \phi & -\phi \\ 1 & 1 & \phi & -\phi & 0 & 0 \\ \phi & -\phi & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Докажем, что данный фрейм имеет полный спарк.

Рассмотрим миноры третьего порядка.

$$A_{1,2,3} = A_{1,2,4} = -A_{1,3,6} = -A_{1,4,5} = A_{1,5,6} = -A_{2,3,5} = -A_{2,4,6} =$$

$$= A_{2,5,6} = A_{3,4,5} = A_{3,4,6} = -2\phi = -1 - \sqrt{5};$$

$$A_{1,2,5} = -A_{1,2,6} = A_{1,3,5} = A_{1,3,6} = -A_{1,4,5} = A_{1,4,6} = -A_{2,3,4} =$$

$$= A_{2,3,6} = A_{2,4,5} = A_{3,5,6} = -A_{4,5,6} = -\phi^3 - 1 = -3 - \sqrt{5}.$$

Получаем, что любые три вектора линейно независимы, $\text{spark}(G) = 4$.

Следующий пример показывает, что выдвинутое выше предположение не оправдывается. Построен равномерный равноугольный фрейм с неполным спарком.

Пример 2: Возьмем систему D в \mathbb{C}^3 , которая является равномерным и равноугольным фреймом.

Найдем чему равен спарк данной системы.

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i4}{5}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i4}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{-\frac{2\pi i}{5}} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Результаты расчетов миноров третьего порядка $A_{i,j,k}$, где i, j, k — столбцы из системы D , можно привести к такому виду:

$$A_{1,2,3} = A_{1,4,5} = -A_{1,3,5} = -\frac{6\sqrt{5}}{25}, \quad A_{1,2,4} = \frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$A_{1,3,4} = \frac{3\sqrt{5}}{25}(\sqrt{3}i + 1), \quad A_{1,3,6} = -A_{1,4,6} = \frac{1}{5}(3 + \sqrt{3}i),$$

$$A_{2,3,4} = A_{3,4,5} = \frac{\sqrt{5}}{25}(3\sqrt{3}i - 7),$$

$$A_{2,3,6} = A_{3,4,6} = A_{4,5,6} = -A_{2,4,6} = -A_{3,5,6} = \frac{1}{5}(-3 + \sqrt{3}i).$$

Миноры третьего порядка:

$$A_{1,2,5} = A_{1,2,6} = A_{1,5,6} = A_{2,3,5} = A_{2,4,5} = A_{2,5,6} = 0.$$

Значит $\text{spark}(D) \leq 3$. Рассматривая произвольные пары векторов на линейную зависимость, получим, что любые два вектора в данной системе будут линейно независимы.

$$\text{spark}(D) = 3$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Casazza P. G. Custom building finite frames // Contemporary Math. 2004. Vol. 345. P. 61–86.
2. Alexeev B., Cahill J., Mixon D. J. Full spark frames // Journal of Fourier Analysis and Application. 2012. Vol. 18, № 6. P. 1167-1194.
3. Mixon D. G. Sparse Signal Processing with Frame Theory // PhD. Princeton University. 2012. arXiv:1204.5958v1 [math.FA].
4. Новиков С. Я., Лихобабенко М. А. Фреймы конечномерных пространств // УОП СамГУ. 2013. С.5–24.
5. Mixon D. G. SOFT 2016: Summer of Frame Theory. URL: <http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory> (дата обращения: 15.06.2017).

УДК 517.53

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ В КЛАССЕ И. И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ Е. Г. Родикова (Брянск, Россия) evheny@yandex.ru

Пусть \mathbb{C} — комплексная плоскость, D — единичный круг на \mathbb{C} , $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D . При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И. И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta < +\infty \right\}.$$