

**ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША К ПОСТРОЕНИЮ  
ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

М. Г. Робакидзе, Ю. А. Фарков (Москва, Россия)

irubak@gmail.com, farkov@list.ru

Пусть  $N = 2^n$ , где  $n$  — натуральное число. Множество  $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$  является абелевой группой с операцией покоординатного сложения по модулю 2:

$$a \oplus b := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu - b_\nu| 2^\nu, \quad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где числа  $a_\nu, b_\nu$  берутся из двоичных разложений

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu 2^\nu, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu 2^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1\}.$$

Пространство  $\mathbb{C}_N$  состоит из комплексных последовательностей

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots),$$

таких, что  $x(j + N) = x(j)$  для всех  $j \in \mathbb{Z}$ . В силу периодичности произвольная последовательность  $x$  из  $\mathbb{C}_N$  может быть задана вектором  $(x(0), x(1), \dots, x(N - 1))$ . Линейные операции в пространстве  $\mathbb{C}_N$  определяются покомпонентно, а скалярное произведение и норма в  $\mathbb{C}_N$  вводятся по формулам

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}, \quad \|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Векторы  $f_0, f_1, \dots, f_m$  образуют *фрейм Парсеваля* для  $\mathbb{C}_N$ , если для каждого  $x \in \mathbb{C}_N$  выполнено равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^m |\langle x, f_k \rangle|^2$$

(см., например, [1]). Об ортогональных базисах в  $\mathbb{C}_N$  и некоторых их применениях для цифровой обработки сигналов см., например, в [2,

гл. 11] и [3]. Ортогональные всплески в  $\mathbb{C}_N$ , ассоциированные с дискретным преобразованием Уолша, построены в [4]. В настоящем сообщении конструкция всплесковых базисов из [4] обобщается на фреймы Парсеваля.

Для любых  $k, j \in \mathbb{Z}_N$  положим  $\{k, j\}_2 := \sum_{\nu=0}^{n-1} k_{n-\nu-1} j_\nu$ , где

$$k = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu 2^\nu, \quad j = \sum_{\nu=0}^{n-1} j_\nu 2^\nu, \quad k_\nu, j_\nu \in \{0, 1\}.$$

*Функции Уолша* для пространства  $\mathbb{C}_N$  обозначаются

$$w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$$

и определяются равенствами

$$w_k^{(N)}(j) = (-1)^{\{k, j\}_2}, \quad w_k^{(N)}(l) = w_k^{(N)}(l + N),$$

где  $k, j \in \mathbb{Z}_N$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

Функции  $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$  образуют ортогональный базис в  $\mathbb{C}_N$ , причем  $\|w_k^{(N)}\|^2 = N$  для всех  $k \in \mathbb{Z}_N$ . *Дискретное преобразование Уолша* сопоставляет произвольному вектору  $x$  из  $\mathbb{C}_N$  последовательность  $\widehat{x}$  коэффициентов Фурье вектора  $x$  по системе  $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ :

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j), \quad \widehat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) w_k^{(N)}(j), \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Для каждого  $k \in \mathbb{Z}_N$  оператор двоичного сдвига  $T_k : \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$  определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \oplus k), \quad x \in \mathbb{C}_N, \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Из определений следует, что для любых  $x, y \in \mathbb{C}_N$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}_N$ , имеют место равенства

$$\langle x, y \rangle = N \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle, \quad \widehat{(T_k x)}(l) = w_k^{(N)}(l) \widehat{x}(l).$$

Пусть  $u_0, u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$  и  $N_1 = 2^{n-1}$ . Если система

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) = \{T_{2^k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{2^k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{2^k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля в  $\mathbb{C}_N$ , то  $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$  называется *фреймом Парсеваля первого этапа* в  $\mathbb{C}_N$ , *пороожденным набором векторов*  $u_0, u_1, \dots, u_r$ .

**Теорема.** Пусть векторы  $u_0, u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$ ,  $r \geq 1$ , такие, что для матрицы

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l + N_1) & \widehat{u}_1(l + N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + N_1) \end{pmatrix} \quad (1)$$

при каждом  $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$  выполнено равенство

$$M(l)M^*(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Тогда система  $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$  является фреймом Парсеваля первого этапа в  $\mathbb{C}_N$ , порожденным набором векторов  $u_0, u_1, \dots, u_r$ .

При условии (2) матрицу  $M(l)$  можно дополнить до унитарной матрицы порядка  $r + 1$ . Поэтому из (1) и (2) следуют неравенства

$$|\widehat{u}_s(l)|^2 + |\widehat{u}_s(l + N_1)|^2 \leq \frac{2}{N^2} \quad \text{для } s = 0, 1, \dots, r, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1.$$

Из сформулированной теоремы видно, что для построения фрейма Парсеваля первого этапа в  $\mathbb{C}_N$  достаточно выбрать вектор  $u_0 \in \mathbb{C}_N$ , удовлетворяющий условию

$$|\widehat{u}_0(l)|^2 + |\widehat{u}_0(l + N_1)|^2 \leq \frac{2}{N^2}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

а затем найти векторы  $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$  такие, что для матрицы  $M(l)$  выполнено равенство (2). Далее по аналогии с [4] для каждого натурального  $m$ ,  $m \leq n$  определяется последовательность диадических фреймов Парсеваля  $m$ -го этапа для  $\mathbb{C}_N$ . Подобный подход может быть реализован с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона (соответствующая конструкция ортогональных всплесковых базисов приведена в [5]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston : Birkhäuser, 2002. 440 р.
2. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. Изд. 2-е. М. : ЛКИ, 2008. 352 с.
3. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.
4. Фарков Ю. А., Строганов С. А. О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 57–66.
5. Фарков Ю. А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914–928.