УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. И. Рафиков (Уфа, Россия)
azat@rafikov.me

Пусть даны кратная последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k, \nu_k\}$ с единственной предельной точкой ∞ и ограниченная выпуклая область $D \subset \mathbb{C}$. Обозначим символом $H(\overline{D})$ пространство функций, аналитических в замыкании области D, с топологией равномерной сходимости на компактах.

Цель работы — представление функций из этого пространства с помощью рядов экспоненциальных многочленов с показателями λ_n. Известен результат А. Ф. Леонтьева [3, гл. IV, § 6, п. 4, теорема 4.6.8] о разложении функции $f(z)$, аналитической в $\bar{D}$, в ряд для случая, когда каноническое произведение $L(\lambda)$, построенное по точкам последовательности Λ, имеет хорошие оценки снизу, в частности, когда оно является функцией вполне регулярного роста:

$$f(z) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega_L(\mu,\alpha,f)e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ — параметр, а $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots$ — неограниченная последовательность радиусов, для которой выполнены условия: $\rho_{k+1}/\rho_k \longrightarrow 1$ при $k \to +\infty$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдётся номер $K(\varepsilon)$, начиная с которого на окружностях $\partial B(0,\rho_k)$ выполняется подходящая оценка снизу на $L(\lambda)$; $\omega_L(\mu,\alpha,f)$ — интерполирующая функция Леонтьева:

$$\omega_L(\mu,\alpha,f) = e^{-\alpha\mu}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \gamma(t)\left(\int\limits_0^t f(t-\xi+\alpha)e^{\mu\xi}d\xi\right)dt.$$

Здесь C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$, на котором (и внутри которого) функция $f(z)$ аналитична, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$.

Выяснилось, что применение техник, описанных в работах [1] и [2], позволяет улучшить этот результат. Во-первых, перейти от колец к «относительно малым» группам, тем самым существенно уменьшив разброс точек Λ внутри групп. Во-вторых, подобрать линейные комбинации элементов системы $\{z^k e^{\lambda_n z}\}_{n=1,k=0}^{+\infty,\nu_n-1}$ так, что разложения по ним имеют более

простой вид. Наконец, записать условие теоремы в терминах геометрических характеристик последовательности.

Введём необходимые понятия и обозначения.

Семейство непустых множеств $U = \{U_m\}_{m=1}^{+\infty}$ назовём разбиением последовательности Λ, если все множества U_m состоят из точек Λ, попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} U_m = \Lambda$. В таком случае естественно ввести ещё одну нумерацию точек Λ, зависящую от U: точки группы U_m пронумеруем произвольным образом как $\{\lambda_{m,k}\}_{k=1}^{N_m}$ (N_m — количество точек λ_k, лежащих в U_m), кратность $\lambda_{m,k}$ обозначим как $\nu_{m,k}$. Разбиение U назовём относительно малым, если

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \max_{1\le k,l\le N_m} \left|\frac{\lambda_{m,k}-\lambda_{m,l}}{\lambda_{m,k}}\right| = 0.$$

Наконец, за $W_D(\varphi,\psi)$ обозначим длину дуги этой области между точками касания опорных прямых, проведённых в направлениях $\arg t = \varphi$ и $\arg t = \psi$; за $W_\Lambda(\varphi,\psi)$ — функцию угловой плотности последовательности Λ. Обе эти функции определены для всех $0 \le \varphi \le \psi \le 2\pi$, кроме не более чем счётного набора значений.

Теорема. *Пусть дана ограниченная выпуклая область $D \subset \mathbb{C}$ и правильно распределённая при порядке 1 последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, для которой $W_\Lambda(\varphi,\psi) = \frac{1}{2\pi} W_D(\varphi,\psi)$.*

Тогда существует такая система $\{e_{m,k}\}_{m=1,k=1}^{+\infty,N_m}$ экспоненциальных многочленов, что всякая функция $f(z) \in H(\overline{D})$ раскладывается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{m=1,k=1}^{+\infty,N_m} d_{m,k} e_{m,k}(z),$$

сходящийся в $H(\overline{D})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 12. С. 49–104.

2. *Кривошеев А. С.* Базисы по «относительно малым группам» // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, № 2. С. 67–89.

3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976. 536 с.

4. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М. : Наука, 1983. 176 с.

5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956. 632 с.