Автором ранее анонсировался результат при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В. В.* О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, вып. 6. С. 1289–1292.

2. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 3–22

3. *Kozko A. I.* The exact constants in the Bernstein-Zygmund-Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson-Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 391–416.

4. *Козко А. И.* О неравенстве Арестова – Бернштейна – Сеге для тригонометрических полиномов // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII междунар. конф. Тульский гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 150–153.

5. *Арестов В. В., Глазырина П. Ю.* Неравенство Бернштейна – Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, вып. 1. С. 17–31

6. *Попов Н. В.* О неравенстве для дробных производных // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф.: Воронеж. зимн. матем. шк. (26 января - 1 февраля 2017). Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. С. 168–169

УДК 517.5

УСИЛЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА УЛЬЯНОВА[1]

М. К. Потапов (Москва, Россия),
Б. В. Симонов (Волгоград, Россия)
mkpotapov@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

I. Обозначим через

• $L_p, 1 \le p < \infty,$ – множество измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ одного переменного x таких, что $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p};$$

• L_p^0 — множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$;

• $\omega_\alpha(f, \delta)_p$ — дробный модуль гладкости порядка $\alpha > 0$ функции $f \in L_p$, т.е.

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta} || \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h)||_p,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 16-01-00350).

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geq 2$.

Отметим, что если $\alpha = k$, где $k \in N$, то $\omega_\alpha(f,\delta)_p$ есть обычный модуль гладкости $k-$го порядка функции $f(x)$.

Хорошо известно неравенство Ульянова [1]:

если $f \in L_p, 1 \leq p < q < \infty,\ \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ k \in N,\ \delta \in (0,1)$, то

$$\omega_k(f,\delta)_q \leq C_1\Big(\int\limits_0^\delta \left[t^{-\theta}\omega_k(f,t)_p\right]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}. \tag{1}$$

Применение дробных модулей гладкости позволило получить следующие усиленные неравенства Ульянова ([2–5]):

а) если $f \in L_p^0, 1 < p < q < \infty,\ \alpha > 0,\ \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ \delta \in (0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \leq C_2\Big(\int\limits_0^\delta \left[t^{-\theta}\omega_{\alpha+\theta}(f,t)_p\right]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \tag{2}$$

неравенство (2) при $p = 1$ несправедливо,

б) если $f \in L_1^0, 1 = p < q < \infty$, $\theta = 1 - \frac{1}{q}$, $\alpha > \gamma > 0$, $\gamma + \theta > \alpha$, $\delta \in (0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \leq C_3\Big(\int\limits_0^\delta \left[t^{-\theta}\omega_{\gamma+\theta}(f,t)_1\right]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \tag{3}$$

в) если $f \in L_1^0$, $1 = p < q < \infty$, $\theta = 1 - \frac{1}{q}$, $\beta > \alpha > 0$, $\delta \in (0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \leq C_4\Big(\int\limits_0^\delta \left[t^{-\theta}\omega_{\alpha+\theta}(f,t)_1\right]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q} +$$

$$+\delta^\alpha\Big(\int\limits_\delta^1 \left[t^{-\alpha-\theta}\omega_{\beta+\theta}(f,t)_1\right]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Отметим, что в неравенствах (1)–(4) постоянные $C_1 - C_4$ не зависят от f и δ.

II. Обозначим через

• $L_p, 1 \leq p < \infty$, — множество измеримых функций $f(x_1, x_2)$ двух переменных x_1 и x_2, 2π-периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|^p dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{p}};$$

• L_p^0 — множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1;

• $\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)$– разность с шагом h_1 положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f \in L_p$, то есть

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

• $\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)$– разность с шагом h_2 положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f \in L_p$, т. е.

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2),$$

• $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p$– смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 функции $f \in L_p$, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p = \sup_{|h_i|\le\delta_i, i=1,2} ||\Delta_{h_1}^{\alpha_1}\big(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\big)||_p;$$

• $\omega_\alpha(f,\delta)_p$ — полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f(x_1,x_2) \in L_p$, т. е.

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup_{|h_1|\le\delta, |h_2|\le\delta} ||\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\alpha}{\nu} f(x_1 + (\alpha-\nu)h_1, x_2 + (\alpha-\nu)h_2)||_p.$$

Для смешанных модулей гладкости справедливы следующие усиленные неравенства Ульянова ([5–8]):

а) если $f \in L_1^0$, $1 < p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_i > 0, \delta_i \in (0,1), i = 1,2$, то

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_q \le C_5\Big(\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}\big[(t_1t_2)^{-\theta}\omega_{\alpha_1+\theta,\alpha_2+\theta}(f,t_1,t_2)_p\big]^q \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad (5)$$

неравенство (5) при $p=1$ несправедливо,

б) если $f\in L_1^0, 1=p<q<\infty, \theta=1-\frac{1}{q}, \alpha_i>\gamma_i>0, \gamma_i+\theta>\alpha_i$, $\delta_i\in(0,1), i=1,2$, то

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_q\le C_6\Big(\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2}\Big[(t_1t_2)^{-\theta}\omega_{\gamma_1+\theta,\gamma_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}},\quad(6)$$

в) если $f\in L_1^0, 1=p<q<\infty, \theta=1-\frac{1}{q}$, $\beta_i>\alpha_i>0, \delta_i\in(0,1)$, $i=1,2$, то

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_q\ll C_7\Big\{\Big(\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2}\Big[(t_1t_2)^{-\theta}\omega_{\alpha_1+\theta,\alpha_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\delta_1^{\alpha_1}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1}\int\limits_0^{\delta_2}\Big[t_1^{-\alpha_1-\theta}t_2^{-\theta}\omega_{\beta_1+\theta,\alpha_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\delta_2^{\alpha_2}\Big(\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_{\delta_2}^{1}\Big[t_1^{-\theta}t_2^{-\alpha_2-\theta}\omega_{\alpha_1+\theta,\beta_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1}\int\limits_{\delta_2}^{1}\Big[t_1^{-\alpha_1-\theta}t_2^{-\alpha_2-\theta}\omega_{\beta_1+\theta,\beta_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\}.\quad(7)$$

Отметим, что в неравенствах (5)–(7) постоянные C_5-C_7 не зависят от f, δ_1 и δ_2.

Для полных модулей гладкости справедливы следующие усиленные неравенства Ульянова ([5, 9, 10]):

а) если $f\in L_p^0,\ 1<p<q<\infty,\ \theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ \alpha>0,\ \delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\le C_8\left(\int\limits_0^{\delta}\Big[t^{-2\theta}\omega_{\alpha+2\theta}(f,t)_p\Big]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},\quad(8)$$

б) если $f\in L_1^0,\ 1=p<q<\infty,\ \theta=1-\frac{1}{q},\ 0<\gamma<\alpha,\ \gamma+2\theta>\alpha$, $\delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\le C_9\Big(\int\limits_0^{\delta}\Big[t^{-2\theta}\omega_{\gamma+2\theta}(f,t)_1\Big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}},\quad(9)$$

в) если $f \in L_1^0,\ 1 = p < q < \infty,\ \theta = 1 - \frac{1}{q},\ \ \beta > \alpha > 0,\ \delta \in (0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \le C_{10}\Big\{\Big(\int\limits_0^\delta \Big[t^{-2\theta}\omega_{\alpha+2\theta}(f,t)_1\Big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\delta^\alpha\Big(\int\limits_\delta^1 \Big[t^{-\alpha-2\theta}\omega_{\beta+2\theta}(f,t)_1\Big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\}. \tag{10}$$

Отметим, что в неравенствах (8)–(10) постоянные $C_8 - C_{10}$ не зависят от f и δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123), № 1. С. 104–131.

2. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Об одном неравестве П. Л. Ульянова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 3. С. 33–36.

3. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 17–25.

4. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Аналоги неравенства Ульянова для дробных модулей гладкости // Современные проблемы математики и механики. Тр. мех.-матем. фак-та МГУ. Т. VIII, Математика. Вып. 1. К 130-летию Н. Н. Лузина и 85-летию П. Л. Ульянова. М. : Изд-во Попечительского Совета мех.-матем. фак. МГУ имени М. В. Ломоносова, 2013. С. 62–70.

5. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. М. : Макс-Пресс, 2016. 340 с.

6. *Potapov M. K, Simonov B. V., Tikhonov S. Yu.* Mixed moduli of smoothness in L_p, $1 < p < \infty$ // A Survey. Surveys in Approximation Theory. 2013. Vol. 8. P. 1–57.

7. *Potapov M. K, Simonov B. V.* Analogues of Ul'yanov inequalities for mixed moduli of smoothness // Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory. Springer Intern. Publ. Switzerland, 2016. P. 161–179.

8. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* О классах Бесова, Бесова – Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных // Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения. Тр. МИАН. Т. 243. М. : Наука, 2003. С. 244–256.

9. *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Полные модули гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, $1 < p < \infty$ // Современные проблемы математики и механики. Т. X. Математика. Вып. 2. К 100-летию Лузинского семинара по теории функций. М. : Изд-во Попечительского Совета мех.-матем. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2015. С. 101–133.

10. *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства полного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Математика. Вып. 1. К 80-летию В.А. Скворцова. М. : Изд-во Попечительского Совета мех.-матем. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016. С. 76–91.