СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособ. / Под ред. А. В. Гасникова. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

2. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка (Учебное пособие). М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

3. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

4. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М. ; -Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 296 с.

5. *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // УМН. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.

6. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2017. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. С. 216–225.

7. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Неединственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения дорожного движения в модели Нагеля – Шрекенберга // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 222–224.

УДК 517.977

О НЕПРЕРЫВНЫХ ВАРИАЦИЯХ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, Россия)
polovinkin.es@mipt.ru

Работа посвящена развитию некоторых результатов, связанных с получением необходимых условий оптимальности в работах [1–4]. Доказано свойство непрерывной зависимости траекторий дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью от начальных приближений в банаховом пространстве. Это свойство является важнейшей частью прямого метода [3–4] получения необходимых условий оптимальности в задаче Майера при ограничениях в виде дифференциального включения.

Ключевые слова: многозначное отображение, дифференциальное включение, условие измеримо-псевдолипшицевости многозначного отображения.

1. Основные обозначения и определения

Будем обозначать через $T := [0, 1]$ отрезок прямой с мерой Лебега на нем и σ-алгеброй $\mathcal{L}$ измеримых по Лебегу множеств. Через E

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00259а).

обозначаем сепарабельное банахово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathcal{B}$, а через E^* - его сопряженное пространство. Через $B_r(a) := \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ ($\overline{B_r(a)} := \{x \in E \mid \|x-a\| \le r\}$) обозначаем открытый (замкнутый) шар с центром в точке a радиуса $r > 0$ в пространстве E. Обозначаем через $\varrho(x, A) := \inf\{\|x-y\| \mid y \in A\}$ — расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$. Через $\mathcal{P}(E)$ обозначаем множество всех подмножеств из банахова пространства E, через $\mathcal{F}(E)$ — множество непустых замкнутых подмножеств из пространства E.

Через $AC(T, E)$ обозначаем *линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций*, т.е. таких, что для каждой функции $f\colon T \to E$ из этого пространства существует суммируемая по Бохнеру функция $v : T \to E$ такая, что для каждого $t \in T$ справедливо равенство

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t v(\tau)d\tau,$$

т.е. функция $v : T \to E$ играет роль производной (в конечномерном случае с ней совпадает) и будет обозначаться как $f' := v$.

Пусть для многозначного отображения $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ определено *дифференциальное включение* вида

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad t \in T. \tag{1}$$

Через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ будем обозначать множество в $AC(T, E)$ всех траекторий $x(\cdot, x_0)$ дифференциального включения (1) на отрезке T при условии, что начальная точка $x_0 \in C_0$.

Пусть заданы некоторое множество $C_0 \in \mathcal{F}(E)$ и некоторая траектория $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ дифференциального включения (1), которую будем рассматривать в качестве тестовой функции. Обобщая определения работ [2–4], сформулируем условие *строгой измеримо–псевдолипшицевости* отображения F для случая такой тестовой функции.

Определение 1. Говорят, что $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ *удовлетворяет условию строгой измеримо–псевдолипшицевости около траектории* $\widehat{x}(\cdot)$, если существуют число $\varepsilon > 0$ и функции $l(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ такие, что выполнены следующие три гипотезы:

Гипотеза 1 (псевдолипшицевость). *Существует измеримая функция* $R : T \to \mathbb{R}^1_+ \cup (+\infty)$ *такая, что для множества*

$$G(t, x) := F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0)), \quad \forall t \in T, \quad x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t)) \tag{2}$$

выполнены условия:

2.1) *для любой функции* $v(\cdot) \in C(T,E)$, *у которой* $v(t) \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$ *при всех* $t \in T$, *отображение* $t \to G(t, v(t))$ *измеримо на отрезке* T;

2.2) *для п.в.* $t \in T$ *и любых* x_1, $x_2 \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$ *справедливы включения*

$$G(t,x_1) \subset F(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}.$$

Гипотеза 2 (умеренный рост). *Существуют число* $\gamma \in (0,1)$ *и функция* $\eta(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ *такие, что при п.в.* $t \in T$ *верна оценка* $0 < \eta(t) \le \gamma R(t)$ *и справедливо неравенство*

$$F(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + \eta(t)B_1(0)) \neq \emptyset, \quad \forall x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t)).$$

Гипотеза 3 (невырожденность). *Справедливо неравенство*

$$\varepsilon \frac{l(t)}{m(1)+1} \le \eta(t) \quad \text{п.в.}\, t \in T.$$

Здесь и далее $m(t) := \int_0^t l(\tau)d\tau, \quad t \in T$, $\widetilde{\gamma} := \min\left\{\frac{1-\gamma}{\gamma};\, \frac{1}{2}e^{-m(1)}\right\}$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ удовлетворяет определению 1.

2. Основной результат

Для получения основного результата (теоремы 1) приведем некоторые определения и леммы.

Определение 2. *Для произвольной функции* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ *определим множество*

$$D_0(F, \rho_0(\cdot)) := \Big\{x(\cdot) \in AC(T,E) \mid \|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{AC} < \frac{\varepsilon}{4}; \tag{3}$$

$$\varrho(x'(t), F(t,x(t))) \le \rho_0(t);\ \eta(t) + \|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \frac{1}{\gamma}\eta(t) \text{ п.в. } t \in T\Big\}.$$

Лемма 1. *Пусть задана функция* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, *удовлетворяющая неравенству* $0 \le \rho_0(t) \le \widetilde{\gamma}\,\eta(t)$ *при п.в.* $t \in T$. *Тогда для любого* $x_0 \in E$ *такого, что* $\|x_0 - \widehat{x}(0)\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 := \widetilde{\gamma}\,\frac{\varepsilon}{(m(1)+1)}\,e^{-m(1)-1}$, *существует функция* $x(\cdot) \in D_0(F, \rho_0(\cdot))$ *такая, что* $x(0) = x_0$.

Замечание. В частности, в случае, когда $\rho_0(t) = 0$, из леммы 1 следует, что для каждого $x_0 \in C \cap B_{\delta_0}(\widehat{x}(0))$ гипотеза о невырожденности (гипотеза 3) гарантирует существование траектории $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$ такой, что $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{AC} < \frac{\varepsilon}{4}$.

Выберем параметр $a \in (0, \varepsilon)$. Для всякой функции $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ определим последовательность функций $\{\rho_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ по формуле

$$\rho_k(t) := l(t)\left(\vartheta_k + \int_0^t \rho_{k-1}(\tau)d\tau\right), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где

$$\vartheta_k := \frac{b}{2^k} e^{-2m(1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b := \frac{a}{4(m(1)+1)}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Для любой функции $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \rho_k(t)$, порожденный последовательностью (4), (5), поточечно сходится, и справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k(t) \le l(t) \left(b + \int_0^t e^{m(t)-m(\tau)} \rho_0(\tau) d\tau \right) \quad \text{при п.в. } t \in T.$$

В частности, если функция $\rho_0(\cdot)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_0(t) \le \widetilde{\gamma}\, \varepsilon \, \frac{l(t)}{m(1)+1}, \quad \text{п.в. } t \in T, \tag{6}$$

то справедливы оценки

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k(t) \le \frac{3}{4} \eta(t), \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho_k(t) + \vartheta_k/4) < \eta(t), \quad \text{п.в. } t \in T.$$

Определение 3. Пусть функции $\rho_k(\cdot)$ и числа ϑ_k определены соотношениями (4), (5), (6). При каждом $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$D_k(F, \rho_k(\cdot)) := \Big\{ x(\cdot) \in AC(T, E) \mid \|x(\cdot) - \widehat{x}'(\cdot)\|_{AC} < \frac{\varepsilon}{4} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} \left(\vartheta_{l+1} + \int_0^1 \rho_l(\tau) d\tau \right); \ \varrho(x'(t), F(t, x(t))) \le \rho_k(t); \tag{7}$$

$$\sum_{l=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \vartheta_{l+1} + \rho_l(t) \right) + \|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \frac{1}{\gamma} \eta(t), \ \text{п.в. } t \in T \Big\}$$

Лемма 3. *При любом $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество $D_k(F, \rho_k(\cdot))$ не пусто, для любого $x(\cdot) \in D_k(F, \rho_k(\cdot))$ справедливо неравенство $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{AC} < \varepsilon$ и при п.в. $t \in T$ справедливы равенства:*

$$\varrho(x'(t),\, F(t, x(t))) = \varrho(x'(t),\, G(t, x(t)));$$

$$F(t, x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)}) = G(t, x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)}),$$

где $r(t) := \varrho(x'(t),\, F(t, x(t))) + \frac{1}{4}\vartheta_{k+1}$.

Лемма 4. *Зафиксируем номер* $k \in \mathbb{N}$, *множество* $S := D_{k-1}(F, \rho_{k-1}(\cdot))$ *из* (7) *и число* $\vartheta = \vartheta_k$ *из* (5). *Существует непрерывное отображение* $f : D_{k-1}(F, \rho_{k-1}(\cdot)) \to D_k(F, \rho_k(\cdot))$ *такое, что для любого* $x(\cdot) \in S$ *при всех* $t \in T$ *справедливы неравенства*

$$\int_0^t \|f'(x(\cdot))(\tau) - x'(\tau)\| d\tau \le \frac{3}{4}\vartheta + \int_0^t \varrho(x'(\tau), F(\tau, x(\tau)))d\tau,$$

$$\int_0^t \varrho(f'(x(\cdot))(\tau), F(\tau, f(x(\cdot))(\tau)))d\tau \le \frac{1}{2}\vartheta + \int_0^t l(\tau)\|f(x(\cdot))(\tau) - x(\tau)\| d\tau.$$

Теорема 1. *Для произвольной функции* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, *удовлетворяющей неравенству* (6), *задано множество* $S_0 := D_0(F, \rho_0(\cdot))$ *(см.* (3)*). Пусть заданы число* $a \in (0, \varepsilon]$, *число* $\delta_1 > 0$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\delta_1 \le \frac{a}{64(m(1)+1)} e^{-2m(1)},$$

и непрерывная функция $d : B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0)) \to E$ *такая, что* $\|d(x) - x\| < \delta_1$ *при всех* $x \in B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0))$. *Тогда существует непрерывное отображение* $r\colon S_0 \to \mathcal{R}_T(F, d(B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0))) \cap C_0)$, *удовлетворяющее для любого* $x(\cdot) \in S_0$ *соотношениям:*

$$r(x(\cdot))(0) = d(x(0)),$$

$$\|r(x(\cdot))(t) - x(t)\| \le \int_0^t e^{m(t)-m(\tau)} \rho_0(\tau) d\tau + \frac{a}{2(m(1)+1)}, \quad \forall t \in T.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988.
2. *Clarke, F. H.* Necessary Conditions in Dynamic Optimization. AMS. Vol. 173, № 816. Providence. 2005.
3. *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 121–141.
4. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физматлит, 2014.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. Ю. Попов (Москва, Россия)

mysfed@rambler.ru

Доказана теорема об оценке снизу наибольшего значения минимума модуля аналитической функции на окружностях, радиусы которых про-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).