для всех $\mathbf{t} \in (G_{\mathcal{P}})^d \setminus A$. *Если функция* f *суммируема, то данный ряд является ее рядом Фурье – Виленкина.*

В [7] для кратных рядов Уолша задача восстановления рядов, сходящихся вне множеств Дирихле для систем $\{g_k\}$, была решена для сходимости к произвольным функциям f. Для этого был построен процесс интегрирования, определенный на классе, включающем все подобные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скворцов В. А.* О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. 1973. № 6. С. 77–79.

2. *Лукомский С. Ф.* О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.

3. *Гоголадзе Л. Д.* К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, № 2. С. 83–90.

4. *Жеребьева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 2. С. 14–21.

5. *Плотников М. Г.* О множествах единственности для кратных рядов Уолша // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 2. С. 265–279.

6. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

7. *Плотников М. Г.* Квазимеры на группе G^m, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 12. С. 131–156.

8. *Плотников М. Г.* λ-Сходимость кратных рядов Уолша-–Пэли и множества единственности // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 2. С. 292–301.

9. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Anal. Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.

10. *Юрченко И. С.* О множествах единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 35–43.

11. *Юрченко И. С.* U-множества для системы характеров нульмерной группы в смысле сходимости по кубам // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. СаратовЁ: ООО «Научная книга», 2016. С. 349–351.

УДК 517.955+004.94

МЕТОД ДВИЖЕНИЯ РАЗРЫВОВ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Подорога, И. В. Тихонов (Москва, Россия)
anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

При макроскопическом моделировании транспортных потоков часто используют квазилинейное уравнение дорожного движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $\rho = \rho(x,t)$ — плотность транспортного потока в точке x в момент времени t. Обычно предполагают, что $0 \leqslant \rho(x,t) \leqslant \rho_{\max}$ с постоянным значением $\rho_{\max} > 0$. Функция $q = Q(\rho)$ называется *фундаментальной диаграммой* дорожного движения (см. [1]). Она выражает зависимость интенсивности движения потока от его плотности. Как правило, функция $Q(\rho)$ выпукла вверх на промежутке $[0, \rho_{\max}]$ и обращается в нуль на его концах: $Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0$. Зададим также начальное условие

$$\rho(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \rho_{\max}$ при $x \in \mathbb{R}$.

Классическая теория задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений указывает на ряд особых проблем, связанных с наличием разрывных решений (см. [1–5]). Это осложняет математическое моделирование плотности $\rho(x,t)$ при $t > 0$. Краткий обзор численных методов для квазилинейного уравнения (1) см. в [6]. Обсудим отдельно предложенный недавно *метод движения разрывов*, эффективно работающий при специальных предположениях.

Выделим класс кусочно линейных фундаментальных диаграмм

$$Q(\rho) = k_j \rho + b_j, \qquad \rho_{j-1} \leqslant \rho \leqslant \rho_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $n \geqslant 2$ — фиксированное число линейных кусков (*транспортных фаз*) с границами

$$0 \equiv \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_{n-1} < \rho_n \equiv \rho_{\max}.$$

Вещественные коэффициенты $k_1, b_1, \ldots, k_n, b_n$ выбраны так, чтобы функция $Q(\rho)$, заданная в (3), являлась непрерывной и выпуклой вверх на $[0, \rho_{\max}]$. Начальное условие (2) будем задавать в классе кусочно постоянных функций.

Итак, возьмем кусочно линейную фундаментальную диаграмму $Q(\rho)$ и кусочно постоянное начальное условие $\varphi(x)$. Тогда обобщенное решение $\rho(x,t)$ поставленной задачи Коши (1), (2) будет определено в классе кусочно постоянных функций, и это решение можно конструктивно построить, указав алгоритм движения имеющихся разрывов.

Выделим один разрыв $x = \xi(t)$ с соответствующими значениями плотности

$$\rho^+ = \rho(\xi(t) + 0, t), \qquad \rho^- = \rho(\xi(t) - 0, t) \tag{4}$$

справа и слева от него. Согласно общей теории (см. [4]) движение разрыва определяется известным *условием Гюгонио*

$$\xi'(t) = \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}. \tag{5}$$

Для создания правильных «энтропийных» разрывов введём дополнительное *условие Олейник* [5]. Нужно, чтобы величины (4) подчинялись неравенству

$$(Q(\rho) - l(\rho))(\rho^+ - \rho^-) \geqslant 0 \tag{6}$$

при всех промежуточных значениях ρ, находящихся между ρ^+ и ρ^-. Здесь

$$l(\rho) \equiv \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}\,(\rho - \rho^-) + Q(\rho^-).$$

Условие Олейник (6) обеспечивает однозначное построение обобщенного решения, исключая из рассмотрения примеры, разобранные в [7].

Перечисленные соображения позволяют формализовать алгоритм для эволюции разрывов решения $\rho(x,t)$ при $t > 0$. Условие Гюгонио (5) в случае кусочно постоянной функции $\rho(x,t)$ задает постоянную скорость движения каждого разрыва $\xi(t)$ для тех времен t, пока это разрыв сохраняется. При пересечении разрывов они объединяются в один результирующий разрыв, у которого значение плотности слева соответствует значению плотности слева для самого левого из пересекающихся разрывов, а значение плотности справа — значению плотности справа для самого правого из пересекающихся разрывов.

Если разрыв $\xi(t)$ в момент времени $t_0 \geqslant 0$ не удовлетворяет условию Олейник (6), то такой разрыв заменяется на несколько новых «промежуточных» разрывов, каждый из которых уже удовлетворяет условию Олейник (подробнее см. в [6]). Таким образом, возникает *веер разрывов* на плоскости (x,t), исходящий из точки $(\xi(t_0), t_0)$.

Метод движения разрывов в своей изначальной форме применим лишь для кусочно постоянных начальных условий (2) и кусочно линейных фундаментальных диаграмм вида (3). Во всех других случаях можно использовать соображения аппроксимации, заменяя произвольную кусочно гладкую диаграмму $Q(\rho)$ на близкую к ней кусочно линейную диаграмму $\widetilde{Q}(\rho)$, а кусочно гладкое начальное условие $\varphi(x)$ на соответствующее кусочно постоянное условие $\widetilde{\varphi}(x)$.

Данный подход сочетается также с рядом других квазилинейных дифференциальных уравнений, отличных от уравнения дорожного движения. Проведенные тесты дали, например, хорошие результаты при аппроксимации известного *уравнения Хопфа*

$$v_t + v v_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0, \tag{7}$$

действующего для поля скоростей $v = v(x,t)$ в модели инерционного движения «нейтральных» частиц (см. [2]). В докладе будут представлены примеры и иллюстрации работы компьютерной программы, реализующей метод движения разрывов, в том числе и для уравнения (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособ. / Под ред. А. В. Гасникова. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

2. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка (Учебное пособие). М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

3. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

4. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М. ; -Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 296 с.

5. *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // УМН. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.

6. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2017. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. С. 216–225.

7. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Неединственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения дорожного движения в модели Нагеля – Шрекенберга // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 222–224.

УДК 517.977

О НЕПРЕРЫВНЫХ ВАРИАЦИЯХ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, Россия)
polovinkin.es@mipt.ru

Работа посвящена развитию некоторых результатов, связанных с получением необходимых условий оптимальности в работах [1–4]. Доказано свойство непрерывной зависимости траекторий дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью от начальных приближений в банаховом пространстве. Это свойство является важнейшей частью прямого метода [3–4] получения необходимых условий оптимальности в задаче Майера при ограничениях в виде дифференциального включения.

Ключевые слова: многозначное отображение, дифференциальное включение, условие измеримо-псевдолипшицевости многозначного отображения.

1. Основные обозначения и определения

Будем обозначать через $T := [0, 1]$ отрезок прямой с мерой Лебега на нем и σ-алгеброй $\mathcal{L}$ измеримых по Лебегу множеств. Через E

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00259а).