Пусть для коэффициентов задачи $\mathrm{K}_{1,2}$ выполняются условия невырожденности, которые в случае $L = \{t : |t| = 1\}$ примут вид:

$$G_{k1}(t)G_{k1}[\alpha(t)] + \overline{G_{k2}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 1,$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + \overline{G_{k1}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 0,$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \equiv 0$$

.

В статье [2] был подробно исследован невырожденный нормальный случай задачи $\mathrm{K}_{1,2}$, когда коэффициенты задачи не могли обращаться в нуль на контуре.

Теперь же рассмотрим исключительный случай задачи $\mathrm{K}_{1,2}$, когда $G_{k1}(t)$ может иметь конечное число нулей на контуре, если сдвиг контура $\alpha(t)$ – прямой, или $G_{k2}(t)$ может иметь конечное число нулей на контуре, если сдвиг контура $\alpha(t)$ обратный.

Доказывается, что тогда задача $\mathrm{K}_{1,2}$ сводится к двум трехэлементным краевым задачам типа Карлемана для аналитических функций в исключительном случае, подробно исследованным, например, в [3, 4]. Получены условия разрешимости задачи $\mathrm{K}_{1,2}$ в исключительном случае, доказана нетеревость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.

2. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 18–26.

3. *Расулов К. М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 189 с.

4. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестн. Брянск. гос. ун-та. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 46–53.

УДК 517.518.82

КРАТКИЙ ОБЗОР ПО ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова (Москва, Россия)
petrosova05@mail.ru

Классические полиномы Бернштейна подробно изучены на стандартном отрезке $[0, 1]$ (см. [1–5]). Некоторые специальные свойства этих полиномов на $[0, 1]$ отмечены в [6–9]. В последнее время наметился осо-

бый интерес к изучению полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$ (см. [10–17]). При переходе к $[-1,1]$ ряд известных свойств стандартных полиномов Бернштейна переносится без изменений, другие, алгебраические и комбинаторные свойства, наоборот, значительно видоизменяются. Случай симметричного отрезка $[-1,1]$ важен с практической точки зрения, поскольку здесь полиномы Бернштейна сохраняют свойства четности или нечетности исходной функции $f \in C[-1,1]$. Для систематической работы с полиномами Бернштейна на $[-1,1]$ удобно иметь набор стандартных формул, аналогичных известным ранее для $[0,1]$. В настоящей заметке дан краткий свод ключевых соотношений и результатов, полученных в этом направлении.

Напомним, что для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \, (1+x)^k \, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Равномерная оценка уклонений в духе теоремы Поповичу [6] выглядит так

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant 2\,\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad x \in [-1,1], \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f.

Для функций, удовлетворяющих на $[-1,1]$ стандартному условию Липшица с константой $L > 0$, оценка (2) дополнительно уточняется:

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{L}{\sqrt{n}}, \qquad x \in [-1,1], \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Элементарный пример функции $f(x) = L\,|x|$ показывает, что оценка (3) точна по порядку и с точки зрения присутствия константы L.

Для разности двух последовательных полиномов Бернштейна действует аналог формулы Темпла [7], а именно, при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$B_{n+1}(f,x) - B_n(f,x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k}(f) \, (1+x)^k \, (1-x)^{n-k+1} \tag{4}$$

с коэффициентами

$$Q_{n,k}(f) = C_{n+1}^k \, f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) - C_n^k \, f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - C_n^{k-1} \, f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right).$$

С помощью формулы (4) можно установить следующее правило регулярного попарного совпадения полиномов Бернштейна.

Пусть функция $f \in C[-1,1]$ кусочно линейна на $[-1,1]$ с конечным числом точек излома, причем абсциссы всех точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей

$$x_j = \frac{p_j}{q_j}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

где

$$p_j \in \mathbb{Z}, \qquad q_j \in \mathbb{N}, \qquad |p_j| < q_j, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Пусть $q = \text{НОК}(\, q_1, \ldots, q_r\,)$. Тогда, если все числа

$$p_1,\ q_1,\ \ldots,\ p_r,\ q_r \tag{5}$$

являются нечетными, то полиномы Бернштейна функции f подчинены правилу попарного склеивания

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Если же среди чисел (5) есть хотя бы одно четное число, то правило склеивания приобретает вид

$$B_{2qm+1}(f,x) = B_{2qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Подробное доказательство правил (6), (7) дано в статье [12].

Явная алгебраическая запись полиномов (1) по степеням переменной x имеет вид

$$B_n(f,x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f)\, x^m, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n}\, C_n^m \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k\, f\!\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \tag{9}$$

со значениями

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j\ C_m^j\, C_{n-m}^{k-j}. \tag{10}$$

Числа $D_{n,m}^k$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ с переменными n, k образуют своеобразные «трапеции», построенные по правилу Паскаля для определенных начальных и краевых условий (подробнее см. [10, 16]).

Эти же трапеции возникают при разложении *бибинома*

$$(1-x)^m\,(1+x)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k\, x^k \tag{11}$$

с фиксированным $m \in \mathbb{N}$ и переменным $n \geqslant m$.

Формулы (8)–(11) служат источником многочисленных комбинаторных соотношений, связанных с полиномами Бернштейна на $[-1,1]$ (см. [16]).

Отдельно обсудим важный пример $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$. Обозначим полиномы Бернштейна такой функции через $B_n(x)$. Применяя формулу (4), получаем, что

$$B_{2m+1}(x) = B_{2m}(x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$B_{2m+2}(x) = B_{2m+1}(x) - \frac{1}{m+1}\, 2^{-2m-1}\, C_{2m}^{m}\, (1-x^2)^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Отсюда выводим разложение

$$B_{2m}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^{k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

упомянутое без доказательства в работе Поповичу [6]. Взяв вторую производную, имеем

$$B''_{2m}(x) = 2^{-2m+1}\, C_{2m}^{m}\, m\, (1-x^2)^{m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

После раскрытия бинома и двукратного интегрирования устанавливаем явную алгебраическую запись

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_{m}^{k}\, x^{2k} \right], \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Полное обоснование формул (12)–(16) см. в [13]. Ряд специальных соотношений, следующих из сопоставления формулы (16) с общим подходом (8)–(10), отмечен в [17].

Отдельно обсудим поведение коэффициентов в формуле (16). Требуется при фиксированном номере $n = 2m$ найти максимальный (по модулю) коэффициент и оценить его рост при $n = 2m \to \infty$. Введем обозначение

$$a_{2m,2k} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, (-1)^{k-1}\, \beta_m(k), \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

с положительными числами

$$\beta_m(k) = \frac{1}{2k-1}\, C_{m}^{k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Обозначим еще

$$\mu_{2m} \equiv \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |a_{2m,2k}| = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \beta_m(k), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

с числами $\beta_m(k)$ из формулы (17). Установлено, что для величины (18) верна асимптотическая формула

$$\mu_{2m} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2}, \qquad m \to \infty,$$

и справедлива оценка

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < 1.2215 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2},$$

действующая при всех натуральных $m \geqslant 8$. Важные детали отличают этот пример от случая симметричного модуля на стандартном отрезке $[0,1]$ (ср. [14] и [8]).

Отметим еще работу [11], где указаны основные формулы, связанные с полиномами Бернштейна для степенной функции $f_p(x) = x^p$ при $p \in \mathbb{N}$ и $x \in [-1,1]$.

Выражаю благодарность И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании полиномов Бернштейна на симметричном отрезке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. 130 p.

2. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin ; Heidelberg ; N.Y. : Springer-Verlag. 1993. 450 p.

3. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна : учеб. пособ. к спецкурсу. Ленинград : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

4. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

5. *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

6. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. Vol. 10. P. 49–54.

7. *Temple W. B.* Stieltjes integral representation of convex functions // Duke Math. J. 1954. Vol. 21, № 3. P. 527–531.

8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вест. Челяб. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научн. конф. «Герценовские Чтения – 2015». СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 115–121.

10. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : Материалы научн. конф. «Герценовские Чтения – 2015». СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 121–124.

11. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Полиномы Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. 2015. Вып. 16. С. 215–220.

12. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.

13. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 425–435. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

14. *Петросова М. А.* О скорости роста максимальных коэффициентов в полиномах Бернштейна, взятых от симметричного модуля на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 209–211.

15. *Петросова М. А.* О поведении коэффициентов в полиномах Бернштейна для симметричного модуля на симметричном отрезке // Математика и информатика : материалы междунар. конф. М. : МПГУ, 2016. С. 77–79.

16. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. 2016. Вып. 17. С. 177–182.

17. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О некоторых комбинаторных задачах, возникших при явной записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. Воронежская зимн. матем. шк. Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. С. 162–163.

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА ДИСКРЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

С. С. Платонов (Петрозаводск, Россия)
platonov@psu.karelia.ru

Пусть G — локально компактная абелева группа (LCA-группа), и пусть $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство (ТВП), состоящее из комплекснозначных функций на G. Будем называть пространство $\mathcal{F}$ *трансляционно инвариантным*, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов) $\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, y \in G$, и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или *обобщенным характером* называется произвольный непрерывный гомоморфизм из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел. Частным