(2) при $f(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty); E)$. Пусть $f(t) \in \mathcal{C}^{n-1}((0, +\infty); E)$, тогда в точках $t = kh$, где $k = 0, \ldots, n-1$, решение имеет k порядком сильной дифференцируемости, а в других точках интервала $(0; +\infty)$ он равен n. Эти факты согласуются с известными сведениями [6, с. 20] о скалярных ($E = \mathbb{R}$) уравнениях с отклоняющимся аргументом.

Предлагаемый подход применим к исследованию более общей задачи с начальными условиями $u(t) = \varphi(t)$, $-h \le t < 0$, $u(0) = u_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. 568 p.

2. *Орлов С. С.* Построение решений в классе распределений дифференциально-операторных уравнений с отклоняющимся аргументом // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посв. памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск : Изд-во «Удмуртский университет», 2015. С. 107–108.

3. *Абловиц Д., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М. : Мир, 1987. 479 с.

4. *Hall B. C.* Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introductions. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 222. N.Y. : Springer, 2015. 453 p.

5. *Шеметова В. В.* Фундаментальное решение одного функционально-дифференциального оператора в банаховом пространстве // Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы : материалы междунар. молодеж. науч. шк. Ч. I. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2017. С. 213–214.

6. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 296 с.

УДК 517.538.3

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Б. П. Осиленкер (Москва, Россия)
b_osilenker@mail.ru

Введение

Рассмотрим нестандартное скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx + A_1 f(1)g(1) + B_1 f(-1)g(-1) +$$

$$+ A_2 f'(1)g'(1) + B_2 f'(-1)g'(-1), \qquad (1)$$

где $w(x)$ — положительная почти всюду на $[-1,1]$ весовая функция, A_1, A_2, B_1, B_2 — положительные числа. Линейное пространство S со скалярным произведением (1) называется дискретным пространством Соболева. Построим последовательность полиномов n-й степени с положительным старшим коэффициентом

$$\{q_n(x)\}: \ q_n(x) \equiv q_n(x; A_1, A_2, B_1, B_2) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ x \in [-1, 1]),$$

ортонормированных по отношению к скалярному произведению (1).

Пространство S и полиномы $q_n(x)$ привлекают внимание многих исследователей в связи с задачами теории функций, функционального анализа, математической физики, теории вероятностей, квантовой механики и вычислительной математики.

Полиномы $q_n(x)$ обладают рядом необычных свойств: не удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению, нули их могут не принадлежать промежутку ортогональности и т.д.

Например, ортонормированные многочлены $q_n(x)$ для всех n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in [-1, 1]$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(x^3 - 3x)q_n(x) = \alpha_{n+3}q_{n+3}(x) + \beta_{n+2}q_{n+2}(x) + \gamma_{n+1}q_{n+1}(x) + \delta_n q_n(x) +$$

$$+\gamma_n q_{n-1}(x) + \beta_n q_{n-2}(x) + \alpha_n q_{n-3}(x), \quad q_{-3}(x) = q_{-2}(x) = q_{-1}(x) \equiv 0,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{8}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = -\frac{9}{8}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, и этот порядок — наименьший.

Пусть $[c, d]$ — произвольный промежуток из $(-1, 1)$. Ортонормированная система $\{q_n(x)\}$ принадлежит классу $\mathbb{Q}([c, d])$, если выполняются условия:

1) ортонормированная система многочленов $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно ограничена на $[c, d]$:

$$\max_{c \le x \le d} |q_n(x)| \le C < \infty;$$

2) для рекуррентных коэффициентов при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} (|\alpha_k - \alpha_{k+1}| + |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\gamma_k - \gamma_{k+1}| + |\delta_k - \delta_{k+1}|) \le C < \infty.$$

Классу $\mathbb{Q}([c, d]$ ($[c, d]$ — произвольный компакт из $(-1, 1)$) принадлежит система симметричных полиномов Гегенбауэра–Соболева $\{\hat{B}_n^{(\alpha)}(x) \equiv \hat{B}_n^{(\alpha)}(x; A_1, A_1, A_2, A_2)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; \ x \in [-1, 1])$, ортонормированных относительно скалярного произведения (1): $w(x) = (1-x^2)^{\alpha}$, $\alpha \ge -\frac{1}{2}$.

1. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье – Соболева

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество функций:

$$\mathfrak{R} = \left\{ f(x),\ x \in [-1,1],\ \int_{-1}^{1} |f(x)| w(x)\, dx < \infty,\ f(\pm 1), f'(\pm 1) \text{ существуют} \right\}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие ряд Фурье–Соболева

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) q_k(x), \quad c_k(f) = \langle f, q_k \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим экспоненциальные средние ряда Фурье – Соболева

$$U_h(f; x; u; \alpha) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-hu^{\alpha}(k))\ c_k(f) q_k(x).$$

Теорема 1. *Пусть на произвольном промежутке* $[c,d] \subset (-1,1)$ *ортонормированная система многочленов* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *принадлежит классу* $\mathbb{Q}[c,d])$ *и при каждом* $h > 0$

$$\exp(-hu^{\alpha}() \ln x = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{2}$$

1. Если $u() \in C^2(0,+\infty)$, $u''(x) < 0$, $x \in (0,+\infty)$, $0 < \alpha \le 1$, *то соотношение*

$$\lim_{h \to 0} U_h(f; x; u; \alpha) = f(x) \tag{3}$$

имеет место в каждой точке Лебега $x \in (c,d)$ *функции* f

$$f \in L_w^2(E) \cup L_w^1[c,d], \quad E = [-1,1] \backslash [c,d].$$

2. Кроме того, если функция f *непрерывна на* $[-1,1]$ *и вес* $w(x)$ *равномерно ограничен на* $[c,d]$, *то равномерно на каждом компакте* $K \subset (c,d)$ *справедливо соотношение* (3).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и в дополнение к* (2) *существует постоянная* $C = C_{u,\alpha} > 0$ *такая, что при всех* $h > 0$, $x \in (1,+\infty)$ *выполняется*

$$xh \exp(-hu^{\alpha}(x) u^{\alpha-1}(x) |u'(x)| \le C$$

и функция

$$V(x) = \alpha h u^{\alpha}(x) \{ [u'(x)]^2 - (\alpha - 1)[u'(x)]^2 - u(x) u''(x)] \} \quad (\alpha > 0)$$

имеет на $(0,+\infty)$ *конечное число нулей. Тогда при всех* $\alpha > 0$ *справедливы утверждения 1 и 2 теоремы 1, соответственно.*

2. Полиномиально-экспоненциальные методы суммирования

Пусть $\pi_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$, $a_n > 0$, — произвольный многочлен n-й степени; введем

$$W_h(f; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp -h\pi_n(k)) \quad c_k(f)p_k(x).$$

Можно показать, что справедливы утверждения теорем 1 и 2.

3. Обобщенное уравнение теплопроводности

Пусть $\{q_n(x)\}_n^{\infty} = 0$ — система полиномов n-й степени, ортонормированных относительно скалярного произведения (1), которые по непрерывной переменной x являются собственными функциями дифференциального оператора D: $D_x q_n = \mu n q_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mu_n \to -\infty$, $n \to +\infty$.

Рассмотрим задачу Дирихле для обобщенного уравнения теплопроводности: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_x u(x,t)$, $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$.

Общее решение (в смысле С. Бохнера) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n^{\mu} t c_n(f) q_n(x), \quad c_n(f) = \langle f, q_n \rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Изложенные выше результаты позволяют исследовать обобщенное уравнение теплопроводности.

Замечание. Для тригонометрических рядов Фурье теоремы 1 и 2 получены в совместных работах с А. Д. Нахманом.

УДК 517.53

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

О. В. Охлупина (Брянск, Россия)
helga131081@yandex.ru

Пусть C — комплексная плоскость, $H(C)$ — множество всех целых функций в C. Если $f \in H(C)$, то обозначим через $n(r)$ число нулей функции f в круге $|z| \le r$.

При всех $0 < p < +\infty$ введем в рассмотрение класс целых функций:

$$A_\rho^p(C) = \left\{ f \in H(C) : \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p}{r^{1+\rho}} dr < +\infty \right\},$$