

**РАВНОУГОЛЬНЫЕ ЖЕСТКИЕ ФРЕЙМЫ  
И РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ<sup>1</sup>**  
**С. Я. Новиков (Самара, Россия)**  
nvks@ssau.ru

Пусть  $M < N$  — натуральные числа, и пусть  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  — набор нормированных ( $\|\varphi_i\| = 1$ ) векторов в  $\mathbb{F}^M$ , где поле  $\mathbb{F}$  может быть как вещественным  $\mathbb{R}$ , так и комплексным  $\mathbb{C}$ . Число  $\max_{i \neq j} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|$  называют когерентностью набора  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . Во многих прикладных вопросах важно найти набор из  $N$  нормированных векторов в  $\mathbb{F}^M$  с минимальной когерентностью. С геометрической точки зрения, ставится вопрос об оптимальном расположении прямых в евклидовом пространстве: для вещественных нормированных векторов  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$ ,  $|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = \cos \theta_{i,j}$  где  $\theta_{i,j}$  — острый угол между прямыми, порожденными векторами  $\varphi_i$  and  $\varphi_j$ . Таким образом, поиск нормированных векторов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  с минимальной когерентностью эквивалентен поиску такого расположения прямых, при котором минимальный угол между парами прямых принимает максимальное значение. Для фиксированной пары  $M < N$  когерентность набора из  $N$  единичных векторов  $\mathbb{F}^M$  ограничена снизу: она отлична от нуля, так как не существует  $N$  ортонормированных векторов в  $\mathbb{F}^M$ , кроме того компактность декартона произведения единичных сфер из  $\mathbb{F}^M$  обеспечивает непрерывность когерентности как функции от  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . Хорошо известна нижняя оценка Уэлча для когерентности [1, 2].

**Теорема 1.** *Если  $M < N$ , и  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  — произвольные нормированные векторы в  $\mathbb{F}^M$ , то*

$$\sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}} \leq \max_{i \neq j} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|.$$

*Равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  — равногольный жесткий фрейм (ETF) в  $\mathbb{F}^M$ .*

По набору векторов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  в  $\mathbb{F}^M$  определим *оператор синтеза*  $\Phi$   $M \times N$ -матрицей, столбцами которой являются векторы  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . *Оператор анализа*  $\Phi^*$  для  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  определяется матрицей, сопряженной к матрице оператора синтеза. Композиция  $\Phi\Phi^*$  определяет *фреймовый оператор*. Формируя композицию в другом порядке, получим *матрицу Грама*  $\mathbf{G} = \Phi^*\Phi$ , для которой  $(\Phi^*\Phi)(i, j) = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ .

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект гранта РФФИ 17-01-00138).

Система векторов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  образует *жесткий (tight)* фрейм, если существует число  $\alpha > 0$  такое, что  $\Phi \Phi^* = \alpha \mathbf{I}$ . В этом случае строки матрицы  $\Phi$  ортогональны и имеют одинаковые нормы.

Фрейм  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  называется равноугольным, если каждый вектор  $\{\varphi_i\}$  имеет единичную норму, и значения модулей скалярных произведений  $|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|$  постоянны для любых пар  $i \neq j$ , таким образом, диагональные элементы матрицы  $\Phi^* \Phi$  равны 1, а внедиагональные имеют одинаковые модули. Равноугольный жесткий фрейм (ETF = equiangular tight frame) — это фрейм, который одновременно жесткий и равноугольный. Именно на таких фреймах, и только на них, достигается граница Уэлча.

Минимальная когерентность равноугольных жестких фреймов стала причиной многих полезных приложений таких систем. Конструктивные методы построения ETF являются предметом поиска многих исследователей.

Пример матрицы оператора синтеза в  $\mathbb{R}^6$ , строки которой ортогональны, столбцы нормированы, и пары столбцов имеют одинаковые модули скалярных произведений приводится ниже [3]:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Весьма перспективным направлением в построении ETF выглядит применение методов теории графов. Обнаружена связь между вещественными ETF и сильно регулярными графиками.

Матрица Грама  $\mathbf{G}$  вещественного ETF представляет собой вещественную симметричную матрицу, на главной диагонали которой расположены 1, на внедиагональных —  $\pm$  граница Уэлча. Такая матрица весьма легко переводится в матрицу смежности  $\mathbf{A}$  некоторого графа.

Соотношение  $\mathbf{G}^2 = \alpha \mathbf{G}$  показывает, что матрица  $\mathbf{A}$  должна обладать дополнительными симметриями. Пусть  $\mathbf{A}$  — матрица смежности графа с  $V$  вершинами, т.е.  $V \times V$  вещественная бинарная ( $0 - 1$ ) симметричная матрица, с нулями на главной диагонали. Соответствующий график называется *регулярным*, если каждая вершина графа имеет одинаковое количество вершин-соседей, другими словами, если существует натуральное  $k$  такое, что  $\mathbf{A}\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1}$  обозначает вектор-столбец с единичными координатами. Такой график называется *сильно регулярным* с неотрицательными параметрами  $(V, k, \lambda, \mu)$ , если каждые две соседние вершины имеют ровно  $\lambda$  общих соседей, а каждые две несоседние вер-

шины имеют ровно  $\mu$  общих соседей. Сильно регулярный граф (SRG) с такими параметрами обозначается SRG  $(V, k, \lambda, \mu)$ .

Каждый ETF  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  в  $\mathbb{R}^M$  порождает SRG с  $V = N - 1$  вершинами и параметрами  $k, \lambda$ , зависящими от  $M$  и  $N$ , а также  $\mu = k/2$ .

С другой стороны, каждый SRG  $(V, k, \lambda, \mu)$  может быть преобразован в вещественный ETF.

Пусть  $\mathbf{B} - V \times V$ -матрица смежности данного графа, причем  $\mu = k/2$ . Полагаем  $N = V + 1$  и определяем  $N \times N$  матрицу смежности соотношением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^* \\ \mathbf{1} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Далее, используя матрицу  $\mathbf{A}$  и  $\beta \in \mathbb{R}$ , определяем матрицу  $\mathbf{G}$  соотношением

$$\mathbf{G} = 2\beta\mathbf{A} + (\beta + 1)\mathbf{I} - \beta\mathbf{J}.$$

Матрица  $\mathbf{G}$  симметричная, на главной диагонали единицы, вне диагональные элементы  $\pm\beta$ . Матрица  $\mathbf{G}$  является матрицей Грама некоторого  $M \times N$  ETF при надлежащем выборе параметров  $M$  и  $\beta$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch R. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. Vol. 20, iss. 3. P. 397–399.
2. Strohmer T., Heath R. W. Grassmannian frames with applications to coding and communication// Appl. Comput. Harmon. Anal. 2003. Vol. 14, iss. 3. P. 257–275.
3. Fickus M., Watson C. E. Detailing the equivalence between real equiangular tight frames and certain strongly regular graphs. // Proc.SPIE. 2015. 959719/.

УДК 517.52

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ П. Л. УЛЬЯНОВА<sup>1</sup>

К. А. Оганесян (Москва, Россия)

oganchris@gmail.com

Рассматриваются ненулевые синус-ряды со стремящимися к нулю монотонными коэффициентами. Показано, что множество нулей на  $[0, \pi]$  такого ряда не может иметь меру больше, чем  $\pi/3$ . Причем если это значение достигается, то почти все множество нулей лежит на отрезке  $[2\pi/3, \pi]$ .

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad a_1 > 0, \quad a_n \searrow 0, \tag{1}$$

---

<sup>1</sup>Полный текст представлен в журнал "Математические заметки".