СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 2. P. 269-–296.

2. *Temlyakov V. N.* Dictionary descent in optimization // Analysis Math. 2016. Vol. 42, № 1. P. 69-–89.

3. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Convex optimization on Banach spaces // Found. Comput. Math. 2016. Vol. 16, № 2. P. 369-–394.

4. *Nguyen H., Petrova G.* Greedy Strategies for Convex Optimization // Calcolo. 2017. Vol. 54, № 1. P. 207–224.

5. *Freund R. M., Grigas P.* New analysis and results for the Frank-Wolfe method // Math. Program. 2016. Vol. 155, № 1—2. P. 199–230.

6. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1-–2. P. 95–110.

7. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787-–823.

8. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л. : Ленингр. ун-т, 1968. 180 с.

9. *Jaggi M.* Revisiting Frank -– Wolfe : Projection-free sparse convex optimization // ICML'13 : Proc. 30th Intern. Conf. on Machine Learning. Atlanta, GA, USA, 2013. P. 427–435.

10. *Clarkson K. L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // ACM Transactions on Algorithms. 2010. Vol. 6, № 4. P. 1–30.

УДК 517.5

# ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА – ЗИГМУНДА – АРЕСТОВА[1]

**В. Р. Мисюк (Гродно, Беларусь)**
misiuk@grsu.by

Введём в рассмотрение тригонометрический полином

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) ,$$

который определён на действительной оси и имеет порядок не выше чем $n$. Свойства тригонометрических полиномов изучены достаточно тщательно в различных аспектах анализа. Замечательным свойством этих полиномов является, то что его норма в основных классических пространствах $C$ и $L_p$ не зависит от сдвига аргумента. Это даёт основание получать точные неравенства с помощью довольно простых, но тем не менее изящных методов, причём многие задачи анализа на классах пререодических функций базируются на этих неравенствах. При этом, особую роль играют неравенства дающие соотношения между нормой производной полинома через норму (вообще может и в другом пространстве) самого полинома. Рассмотрим одно из таких соотношений.

[1]Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция–2020».

Как известно (см., например, [1, 2]),

$$\|T_n'\|_{L_p[0\,,2\pi]} \leqslant n\ \|T_n\|_{L_p[0\,,2\pi]} \qquad 0 < p \leqslant \infty\,. \tag{1}$$

Для $p = \infty$ это соотношение было впервые получено С. Н. Бернштейном [2]. В 1940 году А. Зигмунд обобщил неравенство (1) на случай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в 1980 году В. В. Арестов [3] — на остальные значения параметра $p$. В настоящее время известно множество обобщений этого неравенства в различных направлениях (целые функции, пространства Лебега и др.). С этой точки зрения о соотношении (1) целесообразно говорить, как о *неравенстве Бернштейна–Зигмунда–Арестова*, а настоящая заметка посвящена одному такому аналогу этого неравенства в пространстве Бергмана аналитических функций в круге.

Пусть $m_2$ — плоская мера Лебега в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $D$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических многочленов степени не выше $n$.

Через $A_{p,\alpha}(D)$, $p > 0$, $\alpha > 0$ обозначим пространство Бергмана аналитических функций $f$ в $D$, наделённых конечной квазинормой $\|f\|_{p,\alpha}$ (нормой при $1 \leqslant p < \infty$). Именно

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left( \int\limits_D \left(1 - |\xi|^2\right)^{p\alpha-1} |f(\xi)|^p \, dm_2(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Для функции $f \in A_{p,\alpha}(D)$ положим $f^{[1]}(z) := izf'(z)$ и $f^{[s]}(z) := \left(f^{[s-1]}(z)\right)^{[1]}$ при $s = 2, 3, \ldots$ . Иначе говоря, если $z = r\,e^{i\phi}$, то

$$f^{[s]}(z) = \frac{d^s f\left(r\,e^{i\phi}\right)}{d\phi^s}\,.$$

Следующая теорема даёт аналог соотношения (1) для пространств Бергмана.

**Теорема 1.** *Пусть* $0 < p < \infty$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, $P_n \in \mathcal{P}_n$. *Тогда*

$$\left\| P_n^{[s]} \right\|_{p,\alpha} \leqslant n^s\ \|P_n\|_{p,\alpha}\ . \tag{2}$$

Отметим, что соотношение (2) является точным и в качестве приложения позволяет получить соответствующий аналог обратной теоремы.

Для $f \in A_{p,\alpha}(D)$ введём

$$E_n(f)_{A_{p,\alpha}} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha}\ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

— наилучшее приближение функции $f$ в пространстве $A_{p,\alpha}$ посредством множества $\mathcal{P}_n$.

**Теорема 2.** *Если* $f \in A_{p,\alpha}(D)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$ *и при некотором* $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big( n^s E_n(f)_{A_{p,\alpha}} \Big)^{\min\{p,1\}} < \infty,$$

*то* $f^{[s]} \in A_{p,\alpha}(D)$.

Теоремы 1 и 2 для случая $\alpha = 1 - 1/p$ были получены ранее в [4].


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. Н.* Полное собрание сочинений : в 4 т. Т. 1. М. : Изд-во АН СССР, 1952; Т. 2. М. : Изд-во АН СССР, 1954.

2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. М. : Наука, 1976. 320 с.

3. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. Акад. наук СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1 . С. 3–22.

4. *Мисюк В. Р.* Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер. 2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. 2006. № 1. С. 58–62.



УДК 517.518.126


# О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗМЕРИМЫХ ПО РИМАНУ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ


**К. М. Нараленков (Москва, Россия)**

naralenkov@gmail.com


Класс измеримых по Риману функций, введённый в [2], естественным образом возникает при изучении различных обобщений интеграла Римана для векторнозначных функций. В настоящей заметке изучается вопрос о предельном переходе в последовательности измеримых по Риману и интегрируемых по Хенстоку векторнозначных функций.

Для дальнейшего нам потребуется следующая терминология и обозначения. Пусть $X$ — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы $I$ и $E$ будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a, b]$ соответственно. Произвольная положительная функция на $E$ будет называться *масштабом* на множестве $E$. Наконец, $\mu$ обозначает меру Лебега на действительной оси.