п.в. $t \in (0, t_0)$, $t_0 = \tau(x_0, \partial D)$, *справедливо неравенство* $\frac{(\psi(t))^{s(n-1)}}{(\psi'(t))^{s(n-1)-1}} \leq$ $\leq ct^{s(n-1)}\Phi'_s(t)$, *где постоянная* c *зависит только от* n *и от* s.

Лемма 2. *Если* $f\colon D \to R^n$ *— открытое отображение с* s*-усредненной характеристикой, то в произвольной точке* $x_0 \in D$ *при всех* $r < \eta$, *где* $\eta = \min\{1, \tau^2(x_0, \partial D)\}$ *справедливо неравенство* $\inf f(B^n(x_0, r)) \leq K \ln^{-s(n-1)}\left(\frac{1}{r}\right)$, *где* $B^n(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *а постоянная* K *зависит только от* n *и от* s *и величины* $\Phi_s(D)$.

Теорема 1. *Если множество* G *ограничено, то справедливо неравенство* $M_\beta(\Gamma) = \frac{(\inf m_{n-1}S)^\beta}{[m(G\setminus E)]^{\beta-1}}$, *где* $m(G \setminus E)$ *означает* n*-мерную меру Лебега множества* $G \setminus E$.

При $\beta = n$ это неравенство доказано в [5].

Теорема 2. *Если* $f\colon D \to R^n$ *— открытое отображение с* s*-усредненной характеристикой, то для произвольной точки* $x_0 \in D$ *и для почти всех* $r < \eta$, *где* $\eta = \min\{1, \tau^2(x_0, \partial D)\}$ *справедливо неравенство* $mf(B^n(x_0, t)) \leq K \ln^{-s(n-1)}\left(\frac{1}{r}\right)$, *где* $B^n(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *а постоянная* K *зависит только от* n *и величины* $\Psi_s(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображения с s-усредненной характеристикой // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2014. № 1(27). С. 25–41.

2. *Мазья В. Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы матем. анализа. Л. : Изд-во ЛГУ, 1973. Вып. 3. С. 33–68.

3. *Hesse J.* A p-extrimal length and p-capacity // Arkiv for math. 1975. Vol. 13. № 1. P. 131–144.

4. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publ., 2013. 121 с.

5. *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалы VII Петрозаводской междунар. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17.

УДК 517.53

Lp-НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫСЩИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ[1]

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)
mardvilko@mail.ru

В работе получены верхние и нижние оценки для квазинормы (нормы) для высших производных произведений Бляшке.

[1]Работа выполнена в соответствии с программой ГПНИ «Конвергенция», 2016–2020 годы.

Мы будем работать с пространством Лебега, L_p, $0 < p < \infty$, измеримых комплексных функций на единичной окружности $T = \{z : |z| = 1\}$ с конечной квазинормой (нормой при $1 < p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Пусть $\mathbf{a}_n = a_1, a_2, ..., a_n$ набор из n комплексных чисел, лежащих в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Рассмотрим произведение Бляшке с нулями в точках $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Для краткости мы также введем обозначение

$$\lambda(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

В работе [1] автором была найдена точная постоянная в верхней оценке для s-ой производной произведения Бляшке, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, в пространстве $L_{1/s}$. А именно доказана следующая теорема

Теорема 1. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место равенство*

$$\sup_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} = s! \lambda^s(1/s) \cdot n^s.$$

В работе [1] получены также оценки снизу для s-ой производной произведения Бляшке, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, в пространстве $L_{1/s}$. А именно доказана следующая

Теорема 2. *Для n, $s \in \mathbb{N}$, $n \geq s \geq 2$, выполняется неравенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} > \frac{\pi^{s-1}(s-1)((s-2)!)^s}{2^{3s-1}(s!+1)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n - (s-1))^s.$$

Здесь нами получены нижние и верхние оценки $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in$ $\in (0, \infty) \setminus \{1/s\}$. Результаты представлены в теоремах 3–7.

Теорема 3. *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $1/s < p < \infty$ имеет место равенство*

$$\sup_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 4. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $0 < p < 1/s$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq s!\lambda^s(1/s) \cdot n^s.$$

Теорема 5. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $0 < p < 1/s$ *имеет место равенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Теорема 6. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq s \geq 2$, *и* $1/s < p < \infty$ *имеет место неравенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} > \frac{\pi^{s-1}(s-1)((s-2)!)^s}{2^{3s-1}(s!+1)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n-(s-1))^s.$$

Для первой производной для инфимума рассматирваемой квазинормы можно выписать точное равенство, а именно

Теорема 7. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $p > 1$ *имеет место равенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n'\|_{L_p} = n.$$

Замечание. Неравенста в теоремах 4 и 6 является точным по порядку, т.е. относительно множителя n^s. В этом можно убедиться на примере функции $b_n(z) = z^n$. Постоянная $s!\lambda^s(1/s)$ из теоремы 4 является точной при $s = 1$ и любом $0 < p < 1/s$. Убедиться в этом можно также на примере функции $b_n(z) = z^n$. Для высших производных найденная постоянная не является точной. Для постоянной из теоремы 6 мы не знаем точного значения даже для критического показателя $p = 1/s$, $s \geq 2$, при котором $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ ведет себя устойчиво относительно полюсов произведения Бляшке и имеет порядок n^s.

Для первой произвойдной произведения Бляшке играют роль экстремальных функций в неравенствах типа Бернштейна для рациональных функций [2–3]. Обобщением неравенств типа Бернштейна для рациональных функций на высшие производные занимался А. А. Пекарский [4]. Упомянутые неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций применяются для доказательства обратных теорем рациональной аппроксимации (см. [3–6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mardvilko T. S.* On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions // East journal on approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 31–42.

2. *Русак В. Н.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического многочлена // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7, № 9. С. 580–583.

3. *Долженко И. А.* Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Analysis Math. 1978. Т. 4, № 4. С. 247–268.

4. *Пекарский А. А.* Оценки высших производных рациональных функций и их приложения // Изв. АН БССР. Сер. физ-матем. н. 1980. № 5. С. 21–29.

5. *Lorenz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin : Springer-Verlag, 1996.

6. *Petrushev P. P., Popov V. A.* Rational approximation of real functions. Cambridge Univ. Press, 1987.

УДК 517.5

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША И СИСТЕМЫ СЖАТЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В. А. Миронов, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
v.a.mironoff@gmail.com, terekhinpa@mail.ru

Пусть $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — нечетная 2π-периодическая функция. Тогда

$$D_f := \{f(nt)\}_{n=1}^{\infty}$$

называется системой сжатых функций. Аффинной системой функций типа Уолша, порожденной функцией $f(2\pi t)$, называется

$$W_f := \{f(\pi t)\} \bigcup \left\{ f(2\pi 2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t) \right\}_{\alpha \in \mathbb{A}},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k$ и $r_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, — функции Радемахера.

Подсистема $D_f^{(2)} := \{f(2^k t)\}_{k=0}^{\infty}$ системы D_f на $[0, \pi]$ соответствует подсистеме системы W_f на $[0, 1]$, но при этом, вообще говоря, системы D_f и W_f имеют различные базисные свойства. Тем не менее, в следующем частном случае, когда функция f имеет специальный вид

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \sin(2^k t),$$

условия базисности в пространстве L^2 систем сжатых функций и аффинных систем Уолша совпадают. В статье Митягина [1] показано, что критерием базисности по Риссу системы D_S является отсутствие нулей полинома $\widehat{S}(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ в замкнутом единичном круге ($|z| \le 1$). Это условие является также критерием базисности по Риссу системы W_S.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).