$$\to \quad \min_{C \in R^{n+1}}, \tag{2}$$

$$\rho_2(D) \equiv \max_{t \in [c,d]} \max \{P_n(D,t) - f_1(t) + g_2(t), f_2(t) - g_1(t) - P_n(D,t)\} \quad \to$$

$$\to \quad \min_{D \in R^{n+1}}, \tag{3}$$

где $C$ и $D$ — вектора коэффициентов соответствующих полиномов.

**Теорема.** *Для того, чтобы пара* $({A_1}^*, {A_2}^*)$ *была точкой минимума функции* $\rho(A_1, A_2)$ *на* $R^{2n+2}$ *необходимо и достаточно, чтобы:*

*1) в случае* $\rho_1({A_1}^* + {A_2}^*) > \rho_2({A_1}^* - {A_2}^*)$ *вектор коэффициентов* $C^* = {A_1}^* + {A_2}^*$ *был бы одним из решений задачи* (2)*;*

*2) в случае* $\rho_1({A_1}^* + {A_2}^*) < \rho_2({A_1}^* - {A_2}^*)$ *вектор коэффициентов* $D^* = {A_1}^* - {A_2}^*$ *был бы одним из решений задачи* (3)*;*

*3) в случае* $\rho_1({A_1}^* + {A_2}^*) = \rho_2({A_1}^* - {A_2}^*)$ *хотя бы один из векторов* $C^* = {A_1}^* + {A_2}^*$ *и* $D^* = {A_1}^* - {A_2}^*$ *был бы одним из решений задач* (2) *или* (3) *соответственно.*

Таким образом, возможен следующий подход к решению задачи (1). Сначала следует решить вспомогательные задачи (2) и (3). Если $C^*$ и $D^*$ являются точками минимума функций $\rho_1(C)$ и $\rho_2(D)$ соответственно, то, как следует из теоремы, пара $((C^* + D^*)/2, (C^* - D^*)/2)$ является одним из решений задачи (1). Отметим, что задача вида (2), (3) исследовалась в [2] для случая алгебраических полиномов. Кроме того, при замене в поставновке задачи (1) отрезка $[c, d]$ на дискретную сетку $\{t_i\}_{i=\overline{1,m}}$ задача сводится к задаче линейного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977, 395 с.

2. *Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 51, № 7. С. 1175–1183.

УДК 517.53

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ С $S$-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

**А. Н. Малютина, К. А. Алипова (Томск, Россия)**
nmd@math.tsu.ru

Объект исследования — негомеоморфные пространственные отображения, заданные на произвольной области $D \subset R^n$, $n \geq 3$, называемые далее отображениями с $s$-усредненной характеристикой.

Пусть область $D \subset R^n$, $n \geq 3$, отображение $f\colon D \to R^n$ открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,loc}(D)$. Якобиан отображения

$J(x,f) \neq 0$ и сохраняет знак почти всюду в $D$ (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$), $s > (n-1)^{-1}$.

**Определение 1.** Отображение $f$ называется *отображением с $s$-усредненной характеристикой*, если 1) $f \in W^1_{n,loc}(D)$; 2) существует постоянная $K_{O,s} \geq 0$ такая, что выполняется

$$K_{O,s}(f) = \left( \int\limits_D K_O^s(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,s},$$

здесь $K_{O,s}(x,f) = L^n(x,f)|J(x,f)|^{-1}$ — внешняя дилатация отображения $f$ в точке $x$, $L(x,f) = |f'(x)| = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, $d\sigma_x = dx/(1+|x|^2)^n$ [1, 5].

Пусть далее $G \subset R^n$ открыто и $E$ — непустое множество, содержащееся в $G$.

**Предложение 1.** *Для семейства $\Gamma \subset G$ имеет место равенство*

$$M_1(\Gamma) = \inf m_{n-1} S,$$

*где $m_{n-1}S$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега $C^\infty$-многообразия $S = \partial U$, являющегося границей ограниченного открытого множества $U$, содержащего $E$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $G$, а точная нижняя грань берется по всем таким $S$. Это утверждение частный случай леммы 6 из* [2].

*Пусть $D \subset G$ — открытое множество и $E$ — континуум $E \subset D$, $\Gamma$ — семейство кривых $\gamma \in D$ и соединяющих $E$ с $\partial D$. Тогда при $n-1 < \beta \leq n$, имеет место оценка снизу*

$$M_\beta^{n-1}(\Gamma) \geq c \frac{d(E)^\beta}{|D|^{1-n+\beta}},$$

*где $d(E) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{diam}(E)$ — диаметр $E$, а $C$ — постоянная, зависящая только от $n$ и $\beta$.*

**Доказательство.** При доказательстве этого неравенства используем схему доказательства, приведенного в [1] в емкостной технике.

Если $d = 0$, то неравенство очевидно. Не умаляя общности, будем считать, что пара точек множества $E$, на которой реализуется величина $d$, лежит на $n$-ой координатной оси $x_n$ и одна из точек совпадает с началом координат. Для произвольного $0 < t < d$ обозначим через $\Pi_t$ гиперплоскость $x_n = t$.

В подпространстве $x_n = 0$ рассмотрим единичную $(n-2)$-мерную сферу $S^{n-2}$ с центром в начале координат. Фиксируя произвольную точку $z \in E \cap \Pi_t$, для всякого $y \in S^{n-2}$ через $R(y)$ обозначим верхнюю грань чисел $r_0$ таких, что $z + ry \in G$ при $0 \le r < r_0$. Тогда для любой функции $\varphi \in W_0^\infty(E, G)$ выполнено

$$\int\limits_0^{R(y)} |\Delta\varphi(z + ry)|\, dr \ge \varphi(z) - \varphi(z + R(y)y) = 1.$$

Оценивая здесь левую часть по неравенству Гельдера, имеем

$$1 \le \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1 - n}\right)^{\beta - 1} [R(y)]^{\beta + 1 - n} \int\limits_0^{R(y)} |\Delta\varphi(z + ry)|^\beta r^{n-2}\, dr.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} [R(y)]^{n-\beta-1}$ и интегрируя затем по $y \in S^{n-2}$, получим

$$\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1 - n}\right)^{1-\beta} \int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-\beta-1}\, d\sigma_y \le$$

$$\le \int\limits_{S^{n-2}} d\sigma_y \int\limits_0^{R(y)} |\Delta\varphi(z + ry)|^\beta r^{n-2}\, dr \le \int\limits_{\Pi_t} |\Delta\varphi|^\beta\, d\sigma_z.$$

Для оценки снизу интеграла слева воспользуемся неравенством Гельдера. Обозначим $(n-2)$-мерную меру сферу $S^{n-2}$ через $\omega_{n-2}$, получаем

$$\omega_{n-2}^\beta = \left(\int\limits_{S^{n-2}} d\sigma_y\right)^\beta \left(\int\limits_{S^{n-2}} |\Delta\varphi(z + ry)|^{n-\beta-1}\, d\sigma_y\right)^{n-1} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-1}\, d\sigma_y\right)^{\beta+1-n} \le$$

$$\le [(n-1)m_{n-1}(G \cap \Pi_t)]^{\beta+1-n} \left(\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-\beta-1}\, d\sigma_y\right)^{n-1},$$

где $m_{n-1}P$ означает $(n-1)$-мерную меру Лебега множества $P$. Подставляя это вышеприведенное неравенство и полагая $f(t) = m_{n-1}(G \cap \Pi_t)$, будем иметь

$$\int\limits_{\Pi_t} |\Delta\varphi|^\beta \, d\sigma_y \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} (n-1)^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \omega_{n-2}^{\frac{\beta}{n-1}} [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}}.$$

Интегрируя по $t \in (0, d)$, отсюда имеем

$$\int\limits_{G} |\Delta\varphi|^\beta \, d\sigma_x \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} (n-1)^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \omega_{n-2}^{\frac{\beta}{n-1}} \int\limits_0^d [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \, dt.$$

Чтобы оценить интеграл справа, опять используем неравенство Гельдера

$$d^\beta = \left(\int\limits_0^d dt\right)^\beta \leq \left(\int\limits_0^d f(t)\, dt\right)^{\beta+1-n} \left(\int\limits_0^d [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \, dt\right)^{n-1} \leq$$

$$\leq (mG)^{\beta+1-n} \left(\int\limits_0^d [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \, dt\right)^{n-1}.$$

Окончательно имеем оценку

$$\int\limits_{G} |\Delta\varphi|^\beta \, d\sigma_x \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} (n-1)^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \omega_{n-2}^{\frac{\beta}{n-1}} \frac{d^{\frac{\beta}{n-1}}}{(mG)^{\frac{\beta+1-n}{n-1}}}.$$

Отсюда, ввиду произвола в выборе функции $\varphi \in W_0^\infty(A)$, нужное нам неравенство вытекает из известных соотношений емкости и модуля [3].

Приведем одно дифференциальное неравенство. Для открытого отображения с $s$-усредненной характеристикой с каждой точкой $x_0 \in D$ свяжем неотрицательную функцию $\psi(t) = mf(B^n(x_0, t))$, где $B^n(x_0, t) = \{x : |x - x_0| \leq t\}$, $0 < t < \tau(x_0, \partial D)$. Эта функция не убывает и следовательно для п.в. $t$ существует производная $\psi'(t)$. Такими же свойствами обладает, очевидно, и функция $\Phi_s(t) = \Phi_s(B^n(x_0, t))$, где $\Phi_s(t)$ — субаддитивная функция, участвующая в геометрическом определении отображения с $s$-усредненной характеристикой [1]. Для доказательства нам понадобятся еще две леммы.

**Лемма 1.** *Если $f\colon D \to R^n$ — открытое отображение с $s$-усредненной характеристикой, то в произвольной точке $x_0 \in D$ для*

*п.в.* $t \in (0, t_0)$, $t_0 = \tau(x_0, \partial D)$, *справедливо неравенство* $\frac{(\psi(t))^{s(n-1)}}{(\psi'(t))^{s(n-1)-1}} \leq$ $\leq ct^{s(n-1)}\Phi'_s(t)$, *где постоянная* $c$ *зависит только от* $n$ *и от* $s$.

**Лемма 2.** *Если* $f\colon D \to R^n$ *— открытое отображение с* $s$*-усредненной характеристикой, то в произвольной точке* $x_0 \in D$ *при всех* $r < \eta$, *где* $\eta = \min\{1, \tau^2(x_0, \partial D)\}$ *справедливо неравенство* $\inf f(B^n(x_0, r)) \leq K \ln^{-s(n-1)}\left(\frac{1}{r}\right)$, *где* $B^n(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *а постоянная* $K$ *зависит только от* $n$ *и от* $s$ *и величины* $\Phi_s(D)$.

**Теорема 1.** *Если множество* $G$ *ограничено, то справедливо неравенство* $M_\beta(\Gamma) = \frac{(\inf m_{n-1}S)^\beta}{[m(G\setminus E)]^{\beta-1}}$, *где* $m(G \setminus E)$ *означает* $n$*-мерную меру Лебега множества* $G \setminus E$.

При $\beta = n$ это неравенство доказано в [5].

**Теорема 2.** *Если* $f\colon D \to R^n$ *— открытое отображение с* $s$*-усредненной характеристикой, то для произвольной точки* $x_0 \in D$ *и для почти всех* $r < \eta$, *где* $\eta = \min\{1, \tau^2(x_0, \partial D)\}$ *справедливо неравенство* $mf(B^n(x_0, t)) \leq K \ln^{-s(n-1)}\left(\frac{1}{r}\right)$, *где* $B^n(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *а постоянная* $K$ *зависит только от* $n$ *и величины* $\Psi_s(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображения с s-усредненной характеристикой // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2014. № 1(27). С. 25–41.

2. *Мазья В. Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы матем. анализа. Л. : Изд-во ЛГУ, 1973. Вып. 3. С. 33–68.

3. *Hesse J.* A $p$-extrimal length and $p$-capacity // Arkiv for math. 1975. Vol. 13. № 1. P. 131–144.

4. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publ., 2013. 121 с.

5. *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалы VII Петрозаводской междунар. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17.

УДК 517.53

## Lp-НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫСЩИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ[1]

**Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)**
mardvilko@mail.ru

В работе получены верхние и нижние оценки для квазинормы (нормы) для высших производных произведений Бляшке.

[1]Работа выполнена в соответствии с программой ГПНИ «Конвергенция», 2016–2020 годы.