УДК 517.521

АППРОКСИМАЦИЯ КУСОЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Владикавказ, Россия)
rasuldev@gmail.com

Через $W_p^r([a,b])$ обозначим пространство Соболева, состоящее из $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$, а $f^{(r)}(x) \in L^p([a,b])$, где $L^p([a,b])$ — это пространство функций с интегрируемой p-й степенью и нормой $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Символом $\widetilde{W}_p^r([a,b])$ будем обозначать подпространство функций $f(x) \in W_p^r([a,b])$, которые можно периодически продолжить на всю ось с сохранением гладкости. Напомним также, что если для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ выполняется соотношение $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha$, $x,y \in [a,b]$, то говорят, что она удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с показателем α и коэффициентом M, и пишут $f \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$ или $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, если коэффициент M не существенен. Отметим, что множество функций $\mathrm{Lip}\,1$ совпадает со множеством абсолютно непрерывных функций с существенно ограниченной производной, т.е. $\mathrm{Lip}\,1 = W_\infty^1$.

Как известно, если функция f принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,1$, то по теореме Джексона и неравенству Лебега имеет место следующая оценка: $|R_n(f,x)| = |S_n(f,x) - f(x)| \le cE_n(f)\ln n \le c\frac{\ln n}{n}$.

А. Н. Колмогоров [1] получил асимптотическую формулу для остатка тригонометрических сумм Фурье функции $f \in \mathrm{Lip}_1\,1$:

$$\sup_{\substack{\|f'\|_\infty \le 1,\\ x\in[0,2\pi]}} |R_n(f,x)| = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n} + O(\frac{1}{n}).$$

Более того, если $f \in \widetilde{W}_\infty^r([0,2\pi])$, $r \ge 1$, то

$$\sup_{\substack{\|f^{(r)}\|_\infty \le 1,\\ x\in[0,2\pi]}} |R_n(f,x)| = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O(\frac{1}{n^r}).$$

Указанные оценки справедливы, когда функция удовлетворяет определённым условиям гладкости одинаково на всем рассматриваемом отрезке $[0,2\pi]$. Но если у функции имеются в некоторых точках особенности в виде разрыва или отсутствия производной, то приведённые выше оценки

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00486 а).

перестают быть точными (или становятся вовсе не применимыми). Например, у функции $f(x) = |x-\pi|$ отсутствует производная в точке $x = \pi$, поэтому если рассматривать её на всем отрезке, то мы можем утверждать лишь, что $f \in \widetilde{W}^1_\infty([0, 2\pi])$. Следовательно, согласно приведённой выше оценке остаток ряда Фурье данной функции будет стремиться к нулю со скоростью $\ln n/n$. В то же время можно непосредственно показать, что $\sup_{x\in[0,2\pi]} |R_n(f, x)| \le c/n$. Кроме того, если исключить точки, в которых отсутствует производная, скорость сходимости ряда Фурье к функции $f(x) = |x - \pi|$ увеличивается на порядок: $|R_n(f, x)| \le c(x)/n^2$, $x \in (0, 2\pi)\backslash\{\pi\}$. Оказывается, подобная картина наблюдается для целого класса так называемых кусочно гладких функций. Целью данной работы является исследование вопросов, связанных с получением точных оценок скорости приближения кусочно гладких функций частичными суммами тригонометрических рядов Фурье.

Пространство кусочно гладких функций определяется следующим образом. Пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ $\Omega = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_s = 2\pi\}$. Символом ${}_\Omega W^r_p$ обозначим пространство 2π-периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функции из $W^r_p([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем переопределения их значений на концах рассматриваемого отрезка. Отметим, что пространство ${}_\Omega W^r_p$ содержит и разрывные функции. Например, функция $f(x) = sign \sin x \in {}_\Omega W^r_p$ при $\Omega = \{0, \pi, 2\pi\}$ и любых $r, p \ge 0$. Нас также будут интересовать подпространства пространства ${}_\Omega W^r_p$, состоящие из функций $f(x) \in \widetilde{W}^q_\infty([0, 2\pi])$, таких что $f^{(q)}(x) \in {}_\Omega W^r_p$.

Локальные аппроксимативные свойства тригонометрических сумм Фурье $S_n(f, x)$ и средних Валле Пуссена $V^n_m(f, x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_{n+k}(f, x)$ по ним для функций из пространства ${}_\Omega W^r_p$ исследованы в работах [2, 3]. В них было показано, что суммы Фурье и средние Валле Пуссена вдали от точек разбиения Ω приближают указанные функции со скоростью $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{nm}$ соответственно. Приведённые оценки являются неулучшаемыми по порядку, если рассматривать все пространство ${}_\Omega W^r_p$, которое, как уже отмечалось, содержит и разрывные функции. Возникает вполне естественный вопрос о том, нельзя ли уточнить упомянутые оценки, если сузить рассматриваемое пространство, ограничившись, к примеру, только непрерывными или дифференцируемыми функциями из ${}_\Omega W^r_p$. Основная задача работы заключается в получении оценок скорости приближения суммами Фурье функций $f(x) \in \widetilde{W}^q_\infty([0, 2\pi])$, таких что $f^{(q)}(x) \in {}_\Omega W^r_p$. Кроме того, нам удалось усилить некоторые оценки, полученные в [2, 3] для функций из ${}_\Omega W^r_p$.

Основные результаты приведены в следующих теоремах. В формули-

ровках теорем символом $D = D(\Omega)$ обозначен отрезок $[0, 2\pi]$, из которого исключены точки разбиения Ω: $D = D(\Omega) = \bigcup\limits_{j=1}^{s} (\theta_{j-1}, \theta_j)$.

Теорема 1. *Если $f \in {}_\Omega W^1_\infty$, то для $x \in D$ имеет место оценка*

$$|R_n(f,x)| \le \frac{4\|f'\|_\infty}{\pi^2}\frac{\ln n}{n} + \Big(c\|f'\|_\infty + \sum_{j=1}^{s} \frac{\big|f(\theta_j+0) - f(\theta_j-0)\big|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|}\Big)\frac{1}{\pi n}.$$

Теорема 2. *Если $f \in {}_\Omega W^2_1$, то для $x \in D$ справедлива оценка*

$$|R_n(f,x)| \le \frac{1}{\pi n}\Big[\sum_{j=1}^{s} \frac{|f(\theta_j+0) - f(\theta_j-0)|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} |f'(\theta_j+0) - f'(\theta_j-0)| + \|f''\|_1\Big].$$

Теорема 3. *Пусть $f \in \widetilde{W}^q_1([0,2\pi])$, $q \ge 1$. Тогда*
1) если $f^{(q)} \in {}_\Omega W^1_\infty$, то для $x \in D$

$$|R_n(f,x)| \le \frac{4\|f^{(q+1)}\|_\infty}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^{q+1}} +$$
$$+ \left(c\|f^{(q+1)}\|_\infty + \sum_{j=1}^{s} \frac{|f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|}\right)\frac{1}{\pi n^{q+1}};$$

2) если $f^{(q)} \in {}_\Omega W^1_\infty$, то

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |R_n(f,x)| \le \frac{1}{\pi q n^q}\sum_{j=1}^{s} |f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)| +$$
$$+ \frac{1}{\pi n^{q+1}}\left(\frac{4\|f^{(q+1)}\|_\infty}{\pi}\ln n + c\right);$$

3) если $f^{(q)} \in {}_\Omega W^1_1$, то для $x \in D$

$$|R_n(f,x)| \le \frac{\|f^{(q+1)}\|_1}{\pi q n^q} + \frac{1}{n^{q+1}}\sum_{j=1}^{s} \frac{|f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|};$$

4) если $f^{(q)} \in {}_\Omega W^1_1$, то

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |R_n(f,x)| \le \frac{1}{\pi q n^q}\Big(\|f^{(q+1)}\|_1 + \sum_{j=1}^{s} |f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)|\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grossenordnung Des Restgliedes Fourierscher Reihen Differenzierbarer Funktionen // Annals of Mathematics. 1935. Vol. 36, № 2. С. 521–526. URL : http://www.jstor.org/stable/1968585.

2. *Магомед-Касумов М. Г.* Аппроксимативные свойства классических средних Валле–Пуссена для кусочно гладких функций // Вестн. Дагестанск. научн. центра РАН. 2014. Т. 54. С. 5–12.

3. *Магомед-Касумов М. Г.* Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 2. С. 229–247.

УДК 517.518

О ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ДВУМЯ СЕГМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. В. Макаров, С. И. Дудов (Саратов, Россия)

Alexander-Makarov93@yandex.ru, DudovSI@info.sgu.ru

Пусть $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]\,, G(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ — сегментные функции, заданные на отрезке $[c, d]$ непрерывными функциями $f_i(t)$ и $g_i(t)$, причём $f_1(t) \le f_2(t)$, $g_1(t) \le g_2(t)$ при $t \in [c, d]$. Обозначим через $P_n(A, t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(t)$ — обобщенный полином по некоторой чебышевской на отрезке $[c, d]$ системе функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=\overline{0,n}}$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

Рассмотрим следующую задачу по равномерному приближению многозначного отображения $\Phi(t) = F(t) \times G(t)$ полиномиальной вектор-функцией $\Pi_n(A_1, A_2, t) = (P_n(A_1, t), P_n(A_2, t))$:

$$\rho(A_1, A_2) \equiv \max_{t\in[c,d]} \{\rho_F(F(t), P_n(A_1, t)) + \rho_G(G(t), P_n(A_2, t))\} \quad \to$$
$$\to \quad \min_{A_1\in R^{n+1}, A_2\in R^{n+1}}, \tag{1}$$

где

$$\rho_F(F(t), P_n(A_1, t)) = \max\{P_n(A_1, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A_1, t)\}\,,$$
$$\rho_G(G(t), P_n(A_2, t)) = \max\{P_n(A_2, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A_2, t)\}\,.$$

Нетрудно видеть, что целевая функция задачи (2) является выпуклой на R^{2n+2}. Поэтому при её исследовании, наряду с методами теории полиномиального приближения функций [1], могут также использоваться методы выпуклого анализа и выпуклого программирования. Ниже укажем на возможный подход к получению решения задачи (1). Для этого введем в рассмотрение ещё две задачи:

$$\rho_1(C) \equiv \max_{t\in[c,d]} \max\{P_n(C, t) - f_1(t) - g_1(t), f_2(t) + g_2(t) - P_n(C, t)\} \quad \to$$