

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ¹

С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Пусть $If(x) = \int_0^x f(t) dt$ — оператор интегрирования, $W_n(x)$ — функции Уолша в нумерации Пэли. Определим функцию

$$\varphi(x) = (2^2 I)(2^3 I)^2 W_{2^3-1}(x), \quad x \in [0, 1]$$

и назовем ее двоичным базисным сплайном 3-й степени. Вне отрезка $[0, 1]$ полагаем $\varphi(x) = 0$. Ясно, что $\varphi(x)$ есть многочлен 3-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{2^3}, \frac{k+1}{2^3}\right] \subset [0, 1]$ и $\varphi(x)$ имеет непрерывную 2-ю производную. Классический базисный сплайн обычно строится через разделяемые разности [1–2]. B-сплайны на равномерной сетке были определены в терминах сверток и подробно изучены Стрембергом, Баттлом и Лемарье в [3–5].

Двоичный интерполяционный сплайн на \mathbb{R}

Пусть $f(x)$ кусочно-многочленная функция, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на $(-\infty, +\infty)$, и совпадающая с многочленом 3-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{8}, \frac{k+1}{8}\right], k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Кусочно-многочленная функция f представима в виде ряда*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x + k).$$

Приведем алгоритм построения этого разложения.

Шаг-2. Полагаем $S_{-2}(x) = f''(0)m_{-2}\varphi\left(x + \frac{7}{2^3}\right)$, где m_{-2} выбрано так, чтобы $(m_{-2}\varphi\left(x + \frac{7}{2^3}\right))''_{x=0} = 1$.

Шаг-1. Полагаем $S_{-1}(x) = S_{-2}(x) + (f'(0) - S'_{-2}(0))m_{-1}\varphi\left(x + \frac{6}{2^3}\right)$, где m_{-1} выбрано так, чтобы $(m_{-1}\varphi\left(x + \frac{6}{2^3}\right))'_{x=0} = 1$.

Шаг 0. Полагаем $S_0(x) = S_{-1}(x) + (f(0) - S_{-1}(0))\varphi\left(x + \frac{4}{2^3}\right)$.

Шаг k ($k > 0$). Полагаем

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + \left(f\left(\frac{k}{2^3}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{2^3}\right) \right) m_k \varphi\left(x - \frac{k-1}{2^3}\right), \quad m_k = 2^{-5}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0152).

В результате получаем функцию, совпадающую с $f(x)$ на $[0, +\infty)$. Аналогичным образом находим остальные члены разложения f в виде ряда.

Двоичный интерполяционный сплайн на отрезке

Рассмотрим вопрос построения сплайна 3-й степени на отрезке $[0, 1]$ с помощью двоичных базисных сплайнов. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$. Определим функцию $\psi(x) = \varphi(\frac{n}{8}x)$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\text{supp } \psi = [0, \frac{8}{n}]$. Используя функции $\psi(x - \frac{k}{n})$, построим сплайн 3-й степени дефекта 2, интерполирующий функцию $f(x)$ в точках $x = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Требуемый сплайн строим рекурсивно. Получаем $S_{-2}(x) := m_2 \frac{n^2}{2} \psi(x + \frac{7}{n})$, $m_2 \in \mathbb{K}$. Очевидно, $S''_{-2}(0) = m_2$. $S_{-1}(x) := S_{-2}(x) - \frac{2}{n} \psi(x + \frac{6}{n}) (m_1 - S'_{-2}(\frac{0}{n}))$. Очевидно, что $S'_{-1}(0) = m_1$, $S''_{-1}(0) = m_2$,

$$S_0(x) := S_{-1}(x) + \psi\left(x + \frac{4}{n}\right) \left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right) \Rightarrow S_0(0) = f(0).$$

При $k > 0$ $S_k(x) := S_{k-1}(x) + \frac{\psi(x - \frac{k-1}{n})}{\psi(\frac{1}{n})} (f(\frac{k}{n}) - S_{k-1}(\frac{k}{n})) \Rightarrow S_k(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$.

После n -го шага получаем интерполяционный сплайн S_n 3-й степени дефекта 2. Он зависит от параметров m_2 и m_1 . Приведенный алгоритм не требует решения системы уравнений.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную вторую производную. Параметры m_2 и m_1 можно выбрать так, что

- 1) $|f''(x) - S_n''(x)| \leq 5\omega(h, f'')$;
- 2) $|f'(x) - S_n'(x)| \leq 5h\omega(h, f'')$;
- 3) $|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{5}{8}h^2\omega(h, f'')$, $h = \frac{1}{n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альберг Дж., Нильсен Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М. : Мир. 1972.
2. Де Бор С. Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и Связь, 1985.
3. Strömberg J.-O. A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces // Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund. Chicago, 1981. Vol. 2. P. 475–494.
4. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1 : Lemarie functions // Comm. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 601–615.
5. Lemarie P.-G., Meyer Y. Ondelettes et bases Hilbertiennes // Rev. Math. Iber. 1987. Vol. 2, № 1/2. P. 1–18.