UDC 517.982.252

PROPERTIES OF WEAKLY CONVEX SETS IN SPACES WITH ASYMMETRIC SEMINORM[1]

M. S. Lopushanski (Dolgoprudny, Russia)
masha.alexandra@gmail.com

Weakly convex sets are often considered in literature under different names – sets with positive reach in $\mathbb{R}^n$ ([1]), proximally smooth sets ([2]), prox-regular sets ([3], [4]). The term "weakly convex sets"was introduced by Vial [5]. The motivation for studying weakly convex sets is that the class of weakly convex sets is much wider than the class of convex sets, but shares many useful properties with the latter. The weakly convex sets may be used, for example, in differential inclusions (see, e.g. [6]), in the gradient projection method ([7]), in differential games ([8]), set valued mappings theory ([9]).

We consider weakly convex sets with respect to (w.r.t.) a quasiball in a Banach space. A quasiball is a convex closed (may be unbounded) set that contains a neighbourhood of zero. Such an approach allows us to apply the methods of proximal analysis to the epigraphs of functions and to obtain the conditions of well-posedness for optimization problems of the infimal convolution type (see [10], [11]).

A quasiball in a Banach space E is a convex closed set $M \subset E$ such that $0 \in \operatorname{int} M$ and $M \neq E$. The Minkowski functional $\mu_M(x) = \inf\left\{t > 0 \middle| \, x \in tM\right\}$ of the quasiball is the asymmetric seminorm. The *M-distance* from a set C to a set A is $\varrho_M(C, A) = \inf\limits_{c \in C,\ a \in A} \mu_M(c - a)$. The *$M$-projection* of x onto A is the set $P_M(x, A) = A \bigcap (x - \varrho_M(x, A)M)$. The *Minkowski sum* of sets $A \subset E$ and $B \subset E$ is $A + B = \left\{a + b \,\middle|\, a \in A,\ b \in B\right\}$. The *ball* with center a and radius r is $\mathfrak{B}_r(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$. The set $C \subset E$ is called *strongly convex w.r.t. a quasiball* $M \subset E$ if C is convex, closed and there exists a set $C_1 \subset E$ such that $C + C_1 = M$. A set $A \subset E$ is called *weakly convex* with respect to the quasiball $M \subset E$ if $a \in P_M(a + z, A), \quad \forall a \in A, \quad \forall z \in N^1_M(a, A)$, where $N^1_M(a, A) = \{z \in \partial M \mid \exists t > 0 : \ a \in P_M(a + tz, A)\}$. A set $M \subset E$ is called *parabolic*, if for any vector $b \in E$ the set $\left(b + \frac{1}{2}M\right) \setminus M$ is bounded. A set $M \subset E$ is called *boundedly uniformly convex*, if it is convex and $\lim_{t \to +0} \delta_M(t, R) = 0$ for any $R > 0$, where

$$\delta_M(t, R) = \sup\Big\{\delta \in \left[0, \tfrac{t}{2}\right] \mid \mathfrak{B}_\delta\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \subset M \quad \forall a, b \in M \cap \mathfrak{B}_R(0) : \\ \|a - b\| \geq t\Big\}, \quad t \geq 0.$$

[1]The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 16-01-00259.

The problem $\min_{x\in E} f(x)$ is called *well posed*, if every sequence $\{x_k\} \subset E$ such that $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in E} f(x)$ converges to the solution of this problem.

Theorem 1 [10]. *Let the quasiball M in a Banach space E be parabolic and boundedly uniformly convex. Let the set $A \subset E$ be closed and weakly convex w.r.t. the quasiball M. Let the set $C \subset E$ be strongly convex w.r.t. the quasiball $-rM$, where $0 < r < 1$. Let $0 < \varrho_M(C, A) < 1 - r$. Then the problem $\min_{a\in A,\ c\in C} \mu_M(c - a)$ is well posed.*

A set A is called M-quasibounded, if for any point $x \in E \setminus A$ we have $\varrho_M(x, A) > 0$ and for any $R > 0$ the inequality

$$\sup_{a\in\partial A\cap\mathfrak{B}_R(0)} \ \sup_{z\in N^1_M(a,A)} \|z\| < +\infty$$

holds.

Theorem 2 [10]. *Let the quasiball M in a Banach space E be parabolic and boundedly uniformly convex. Let the set $A \subset E$ be M-quasibounded and weakly convex w.r.t. M. Let the set $C \subset E$ be strongly convex w.r.t. the quasiball $-rM$, where $r \in (0, 1)$ and $\operatorname{int} C \neq \emptyset$. Let $\varrho_M(C, A) < 1 - r$, $A \bigcap \operatorname{int} C = \emptyset$. Then the problem $\min_{a\in A,\ c\in C} \mu_M(c - a)$ is well posed.*

The quasiball $M \subset E$ is called *boundedly uniformly smooth*, if $\lim_{t\to+0} \frac{\beta_M(t,R)}{t} = 0 \quad \forall R > \sigma_M$, where σ_M is such that $\mathfrak{B}_{\sigma_M}(0) \subset M$ and for any $t \geq 0$ and $R > \sigma_M$

$$\beta_M(t, R) = \sup\left\{\frac{\mu_M(x + ty) + \mu_M(x - ty)}{2} - 1 \ : \ x \in \partial M \cap \mathfrak{B}_R,\ y \in \mathfrak{B}_1\right\}.$$

Theorem 3 [12]. *Let E be a Banach space and the quasiball $M \subset E$ be parabolic and boundedly uniformly convex. Let $0 < r < R$, the sets $A, C \subset E$ be closed, A be weakly convex with respect to the set RM, C be strongly convex with respect to the set $(-rM)$, $A + R \operatorname{int} M \neq E$. Let at least one of the following statements hold*

1) $\varrho_M(C, A) > 0$ or

2) $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, $A \cap \operatorname{int} C = \emptyset$ and the quasiball M is boundedly uniformly smooth, the set A is M-quasibounded.

Then there exist $a, c \in E$ such that $\operatorname{int} C \subset c - \operatorname{int} rM \subset a - \operatorname{int} RM \subset E \setminus A$.

The *Fréchet normal cone* to the set A at $x \in A$ is $N^F(x, A) = \{\xi \in E^* | \quad \forall\gamma > 0 \quad \exists\delta > 0 : \langle\xi, a - x\rangle \leq \gamma \ \|a - x\|, \quad \forall a \in \mathfrak{B}_\delta(x) \bigcap A\}$. The *support function* of the set $M \subset E$ is $s(p, M) = \sup\limits_{x\in M} \langle p, x\rangle, \quad p \in E^*$.

Given a functional $p \in E^*$, if $p \in b(M) \setminus \{0\}$ we define $J_M^*(p) = \{x \in E : \langle p, x\rangle = (p, M)\mu_M(x), s(p, M) = \mu_M(x)\}$, otherwise we put $J_M^*(p) = \{0\}$.

The *proximal M-normal cone* to the set A at a point $a \in \partial A$ is $N_M^P(a, A) = \{p \in b(M) |\, \exists z \in J_M^*(p),\, \exists t > 0 :\, a \in P_M(a + tz, A)\}$.

The *Mordukhovich limiting cone* is

$$N_M^L(x, A) = {}^{w^*-seq}\limsup_{y\to x} N_M^P(y, A) =$$
$$= \{{}^{w^*} - \lim_{n\to\infty} x_n^* :\, x_n^* \in N_M^P(x_n, A), x_n \in A, x_n \to x, n \to \infty\},$$

where ${}^{w^*} - \lim$ means the limit with respect to weak* topology.

Theorem 4 [13]. *Let E be a reflexive Banach space. Let the quasiball M be boundedly uniformly smooth, boundedly uniformly convex and parabolic. Let the set $A \subset E$ be M-quasibounded and weakly convex w.r.t. M. Then* $N^F(x, A) = N_M^P(x, A) = N_M^L(x, A), \quad \forall x \in A.$

The results were obtained under the supervision of professor G.E. Ivanov.

REFERENCES

1. *H. Federer* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 93. P. 418–491.

2. *F. H. Clarke , R. J. Stern, P. R. Wolenski* Proximal Smoothness and Lower–C^2 Property // J. Convex Analisys. 1995. Vol. 2, № 1,2. P. 117–144.

3. *R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar* Prox-regular functions in variational analysis // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348. P. 1805–1838.

4. *F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva* Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces // J. Convex Analysis. 2006. Vol. 13. P. 525–559.

5. *J.-P. Vial* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

6. *L. Thibault* Sweeping process with regular and nonregular sets // J. Differential Equations. 2003. Vol. 193. P. 1–26.

7. *M. V. Balashov* About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set // J. Convex Analysis. 2017. Vol. 24, № 2. P. 493–500.

8. *G. E. Ivanov* Weakly Convex Sets and Their Properties // Mathematical Notes. 2006. Vol. 79, № 1. P. 55–78.

9. *M. V. Balashov, G. E. Ivanov* Properties of the metric projection on weakly Vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images // Mathematical Notes. 2006. Vol. 80, № 3. P. 461–467.

10. *G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski* Well-Posedness of Approximation and Optimization Problems for Weakly Convex Sets and Functions // J. Mathematical Sciences. 2015. Vol. 209, № 1. P. 66–87.

11. *G. E. Ivanov* Continuity and selections of the intersection operator applied to nonconvex sets // J. Convex Analysis. 2015. Vol. 22, № 4. P. 932–962.

12. *G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski* Separation theorems for nonconvex sets in spaces with non-symmetric seminorm // J. Math. Ineq. and Applications. 2017. Vol. 20, № 3. P. 737–754.

13. *M. S. Lopushanski* Normal Regularity of Weakly Convex Sets in Asymmetric Normed Spaces // J. of Convex Analysis. 2018. Vol. 25, № 3. P. n.a.

УДК 519.63+523.68

ЭФФЕКТ КОЛЛИМАЦИИ ПРИ ПОЛЕТЕ ДВУХ ТЕЛ ДРУГ ЗА ДРУГОМ

В. Т. Лукашенко, Ф. А. Максимов (Москва, Россия)
lukashenko-vt@yandex.ru, f_a_maximov@mail.ru

Одним из механизмов разрушения метеорного тела в атмосфере является его распад на отдельные тела меньшего размера — фрагменты или осколки. Данные осколки затем продолжают свое движение как группа тел. При этом часть осколков может оказаться расположена позади лидирующих тел в области пониженного давления. Такие осколки будут иметь меньшее аэродинамическое сопротивление, а значит медленнее тормозиться. В динамике это приводит к эффекту коллимации [1] — отстающие тела начинают вовлекаться в след лидирующих, что в свою очередь может приводить к соударению тел.

В работе [2] представлен метод моделирования на системе сеток, позволяющий расчитывать обтекание различных тел в достаточно произвольных конфигурациях. В [3] представленна адаптация этого метода для решения сопряженной задачи, когда аэродинамическая и баллистическая задачи решаются параллельно. Полагается, что тела двигаются как группа вдоль заданного направления с некоторой преобладающей скоростью. Для этого значения скорости решается задача обтекания тел методом установления. Из полученного распределения давления находятся аэродинамические силы, действующие на каждое отдельное тело в конфигурации, и затем происходит переход к решению баллистической задачи — тела сдвигаются исходя из действующих на них сил и возможного небольшого отклонения их собственных скоростей от скорости преобладающего движения.

Метод [3] оказалось возможно дополнить алгоритмом для моделирования соударений между телами. Если имеются два круговых цилиндра с центрами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и радиусами R_1, R_2, то соударение между ними будет происходит при

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < R_1 + R_2 + C,$$

где константа C определяется исходя из размера сеток [2], построенных для моделирования течения вблизи тел, а также максимального расчетного шага по времени Δt.