

3. $\psi(x) \in L[0, 1]$. Формальное решение берем таким же, что и в п. 2.

Лемма 9. Ряд $u_0(x, t)$ сходится всюду, а ряд $u_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и справедливы оценки

$$\|u_0(x, t)\|_{L_2(Q_T)} \leq C_T \|\psi\|_1, \quad \max_{Q_T} |u_1(x, t)| \leq C_T \|\psi\|_1,$$

где C_T зависит только от T , $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0, 1]$.

Теорема 3. Если $\psi(x) \in L[0, 1]$, то ряд $u(x, t)$ формального решения задачи (1)–(3) сходится всюду по x и t и $u(x, 0) = 0$. Если $\psi_h(x)$ — также, что и $\psi(x)$ в теореме 1 и $\|\psi_h - \psi\|_1 \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$, то решение $u_h(x, t)$ задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$ сходится к $u(x, t)$ в $L_2(Q_T)$ при любом $T > 0$, т.е. $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3) для $\psi(x) \in L[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курдюмов В. П., Хромов А. П. Свойства формального решения смешанной задачи для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронеж. весен. матем. шк. «Понtryгинские чтения – XXVII» (3–9 мая 2016 г.) Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2016. С. 170–173.

УДК 534.1

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, И. В. Корпен,
С. Н. Косинова (Сызрань, Россия)

vladlitvinov@rambler.ru

При решении задач о колебаниях механических объектов с движущимися границами возникает необходимость в решении следующего функционального уравнения [1, 2]:

$$\varphi(\tau + l(\tau)) - \varphi(\tau - l(\tau)) = 1, \quad (1)$$

где τ — безразмерное время, $l(\tau)$ — закон движения границы. Задача состоит в нахождении $\varphi(z)$ при различных значениях $l(\tau)$. В общем случае методика нахождения точного решения уравнения (1) неизвестна. Для решения используется обратный метод, т.е. по заданной функции $\varphi(z)$ находится $l(\tau)$. Например, для функции

$$\varphi(z) = \frac{\ln [(vz + 1)/(1 - v)]}{\ln [(1 + v)/(1 - v)]} - 1 \quad (2)$$

закон движения границы имеет вид $l(\tau) = 1 + v\tau$, где v — скорость движения границы.

В настоящей работе получено точное решение уравнения (1) в частном случае, при неподвижной левой границе. Так же получено приближенное решение уравнения (1) в случае равномерного движения границы с помощью метода наименьших квадратов. Произведена оценка погрешности приближенного метода.

Пусть движение системы описывается волновым уравнением:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (3)$$

при граничных условиях первого рода

$$\begin{aligned} U(\ell_1(\tau), \tau) &= F_1(\tau), & U(\ell_2(\tau), \tau) &= F_2(\tau), \\ \ell_1(0) &= 0, & \ell_2(0) &= 1, & \ell_2(\tau) &> \ell_1(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь τ, ξ — безразмерное время и безразмерная пространственная координата; $\ell_1(\tau), \ell_2(\tau)$ — законы движения границ; $F_1(\tau), F_2(\tau)$ — заданные функции.

Для решения задачи (3), (4) используем представление Даламбера. Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(\xi, \tau) = g(\tau + \xi) + G(\tau - \xi), \quad (5)$$

где $g(z)$ и $G(z)$ — произвольные функции, которые необходимо определить из граничных условий, z — произвольная независимая переменная.

Подставляя решение (5) в граничные условия (4), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g(\tau + \ell_1(\tau)) + G(\tau - \ell_1(\tau)) = F_1(\tau), \\ g(\tau + \ell_2(\tau)) + G(\tau - \ell_2(\tau)) = F_2(\tau). \end{cases} \quad (6)$$

В отличие от метода А. И. Весницкого [2], где в дифференциальном уравнении вводятся новые переменные останавливающие границы и оставляющие уравнение инвариантным, для упрощения задачи введем в систему (6) новые функции [3]:

$$g(z) = r(\varphi(z)), \quad G(z) = R(\psi(z)), \quad (7)$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = \psi(\tau - \ell_1(\tau)), \\ \varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = \psi(\tau - \ell_2(\tau)) + 1. \end{cases} \quad (8)$$

Заметим, что возможность решения задачи (3), (4) зависит от степени сложности граничных условий, а также от того, сможем ли мы решить систему (8). Для решения таких систем в [1–3] использован обратный метод. При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям: $\ell_1(0) = 0$; $\ell_2(0) = 1$; $\psi(-1) = -1$.

Множество полученных законов движения границ разбито на классы. Решения, приведенные в табл. 1, получены впервые и относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и $\varphi(z) = \psi(z)$.

Таблица 1

№	$l_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1.	$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{0,5}{B_1 e^{\alpha \tau} - B_2 e^{-\alpha \tau}} \right]$	$B_1(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}) + B_2(e^{-\alpha z} - e^\alpha) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/(e^\alpha - e^{-\alpha}), \alpha > 0$
2.	$\sqrt{(\tau + B)^2(\alpha^2 - 1) + 1 + 2\alpha B + B^2} - \alpha(\tau + B)$	$\frac{Ln[(z+B)^2+1+2\alpha B+B^2]}{Ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} -$ $- \frac{Ln[(B-1)^2+1+2\alpha B+B^2]}{Ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} - 1$
3.	$\frac{1}{\alpha} \left(\ln \frac{1+\sqrt{1+4A^2e^{2\alpha\tau}}}{2A} \right) - \tau$	$Ae^{\alpha z} + B, \alpha = \ln \frac{1+\sqrt{1+4A^2}}{2A}$

Следующий класс В определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau) = \ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell(\tau); \quad \ell(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением

$$\varphi(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1) - \psi(z - 1) = 1. \quad (9)$$

Система (8) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (9). Приведем два ранее не известных решения класса В:

1. Для заданных функций $\varphi(z) = B(e^{-\alpha z} - 1) - C(e^{-\alpha} - 1) - 1$; $B = C + 1/(e^{-\alpha} - 1)$; $\psi(z) = C(e^{\alpha z} - 1) - C(e^{-\alpha} - 1) - 1$ из системы (8) находим следующие законы движения границ:

$$\ell_1(\tau) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau}) / (B - C) \right], \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell_1(\tau).$$

2. Для функций $\varphi(z) = (1 - \nu)z/2 + (1 + v)/2 - 1$, $\psi(z) = (1 + \nu)z/2 + (1 + v)/2 - 1$ законы движения границ $\ell_1(\tau) = \nu\tau$, $\ell_2(\tau) = 1 + \nu\tau$.

Здесь α , B , C , v — постоянные величины.

Для решений класса С границы движутся симметрично в разные стороны, т.е. $\ell_1(\tau) = -\ell(\tau)$, $\ell_2(\tau) = \ell(\tau)$.

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса С получаются из решений класса А по следующим формулам:

$$\ell(\tau) = \ell_A(\tau), \quad \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_a(z), \quad \varphi(z) = \psi(z) + 0.5,$$

где индексом обозначены соответствующие функции решений класса А.

Новое решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\begin{aligned} \ell_1(\tau) &= (B_2 - B_1)\tau/(B_2 + B_1), \\ \ell_2(\tau) &= (B_2 e^{1/c} - B_1)\tau/(B_2 e^{1/c} + B_1) + 1, \\ \varphi(z) &= \psi(z) = CLn(B_1 z + D) - CLn(D - B_2) - 1, \\ D &= (B_1 + B_2 e^{1/c})/(e^{1/c} - 1). \end{aligned}$$

Класс обратных решений ограничен, например, не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau^2$. Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона.

Для получения приближенного решения функционального уравнения (1) предлагается использовать метод наименьших квадратов. Функция $\varphi(z)$ находится в виде многочлена степени n :

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n. \quad (10)$$

Параметры p_1, p_2, \dots, p_n с помощью метода наименьших квадратов находятся таким образом, чтобы функция (10) удовлетворяла уравнению (1) при различных τ_i ($i = \overline{1, m}$).

В целях оценки погрешности метода рассмотрена тестовая задача. Для линейного закона движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau$ при различных значениях v находился многочлен пятой степени

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - 1, \quad (11)$$

удовлетворяющий условию $\varphi(-1) = -1$.

Значения многочлена, полученного по методу наименьших квадратов, сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (2). Сравнение производилось за период времени, пока длина уменьшалась от 1 до 0.3. При меньших длинах многочлен (11) плохо описывает функцию $\varphi(z)$. При стремлении $l(\tau)$ к нулю уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(\tau + 0) - \varphi(\tau - 0) = 1,$$

т.е. функция $\varphi(z)$ в точке τ терпит разрыв.

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ метода наименьших квадратов (разница между функциями (2) и (11)) в зависимости от скорости движения границы v приведены в табл. 2.

Таблица 2

v	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Δ	0.017	0.015	0.013	0.015	0.017	0.039	0.054	0.046	0.140

В интервале $v \in [0.1; 0.6]$ погрешности рассмотренных приближенных методов малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (2) при $v \rightarrow 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный приближенный метод для решения функционального уравнения (1) в случаях, когда его точное решение не известно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. Самара : СамГТУ, 2017. 149 с.
2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М. : Физматлит, 2001. 320 с.
3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3(28). С. 145–151.
4. Литвинов В. Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журн. Средне-волжск. матем. о-ва. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.