УДК 517.984

МЕТОД ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
khromovap@info.sgu.ru

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x)$, $\psi(x)$ — комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L_2[0,1]$, α_i, β_i $(i = 1,2)$ — комплексные числа.

В [1] для $q(x) \in C[0,1]$ было получено классическое решение задачи (1)–(3) для $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ и обобщенное решение, когда $\psi(x) \in$ $\in L_2[0,1]$. Здесь подобные результаты приведем в случае $q(x) \in L_2[0,1]$, а также и для $\psi(x) \in L[0,1]$.

1. Считаем сначала, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Ряд формального решения представим в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)(R^\circ_\lambda \psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)(R_\lambda \psi_1 - R^\circ_\lambda \psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}, \quad Ly = -y'' + q(x)y,$$

$$y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0;$$

$$R^\circ_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}, \quad L_0 y = -y'', \quad y'(0) = y'(1) = 0,$$

E — единичный оператор, λ — спектральный параметр, γ_n — образ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$) окружности $\{\rho \big| |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ достаточно мало), содержащий внутри себя лишь одно собственное значение оператора L, которые являются простыми при $n \geq n_0$, $r > 0$ фиксировано и таково, что контур $|\lambda| = r$ содержит все собственные значения оператора L, не попавшие в γ_n при $n \geq n_0$, $\psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi(x)$, $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L), $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$, μ_0 — фиксированное число, расположенное вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geq n_0$.

Лемма 1. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau)d\tau,$$

где $\tilde{\psi}(x)$ — четная 2-периодическая функция, $\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in$ $\in [0,1]$.

Из леммы 1 получается

Лемма 2. *Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(2) *при $q(x) = 0$ и $\psi_1(x)$ вместо $\psi(x)$ с граничными условиями $u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$, когда уравнение* (1) *выполняется почти всюду (п.в.).*

Лемма 3. *Ряды $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием до второго порядка по t и до первого порядка по x сходятся абсолютно и равномерно в $Q_T = [0,1] \times [-T,T]$ при любом $T > 0$.*

Лемма 4. *Функции $u'_{1x}(x,t)$ и $u'_{2x}(x,t)$ абсолютно непрерывны по x в Q_T.*

На основании этих результатов получаем

Теорема 1. *Если $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи* (1)–(3) *непрерывно дифференцируема по x и t и удовлетворяет условиям* (2), (3)*; $u'_x(x,t)$ $(u'_t(x,t))$ абсолютно непрерывна по x (по t) и п.в. удовлетворяется уравнение* (1)*, т.е. $u(x,t)$ является классическим решением, когда уравнение* (1) *выполняется п.в.*

2. $\psi(x) \in L_2[0,1]$. Формальное решение берем в виде $u(x,t) =$ $= u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$ — те же, что и в п. 1, но с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$.

Лемма 5. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его*

суммы имеет место формула

$$u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x)$ *— нечетная 2-периодическая функция,*

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x [\psi(\tau) - (\psi,1)]d\tau$$

при $x \in [0,1]$.

Лемма 6. *Функция* $u_0(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x, t *и удовлетворяет условию* $u_0(x,0) = 0$; *п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_{0t}(x,0)$ *и п.в.на* $(-\infty,\infty)$ *существуют* $u'_{0x}(0,t)$, $u'_{0x}(1,t)$, *причем* $u'_{0t}(x,0) = \psi(x)$, $u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$.

Лемма 7. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и* t *один раз, сходятся абсолютно и равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$.

На основании лемм 6, 7 и теоремы равносходимости для операторов L и L_0 получим

Лемма 8. *Сумма ряда* $u(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x,t *и* $u(x,0) = 0$; *п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_t(x,0)$ *и п.в. на* $(-\infty,\infty)$ *существуют* $u'_x(0,t)$, $u'_x(1,t)$; *п.в. выполняются условия* (3) *и* $u'_t(x,0) = \psi(x)$. *Кроме того,* $\max\limits_{Q_T}|u(x,t)| \le C \parallel \psi \parallel_2$, *где* C_T *зависит только от* T *и* $\|\cdot\|_2$ *— норма в* $L_2[0,1]$.

Пусть $\psi_h(x)$ — та же, что и $\psi(x)$ в теореме 1. Решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 1, обозначим $u_h(x,t)$.

Теорема 2. *Если* $\psi(x) \in L_2[0,1]$, *то сумма ряда* $u(x,t)$ *формального решения задачи* (1)–(3) *удовлетворяет условию* $u(x,0) = 0$ *и п.в. на* $(-\infty,\infty)$ *условиям* (3); $u(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t, *п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_t(x,0)$ *и* $u'_t(x,0) = \psi(x)$. *Более того, если* $\parallel \psi_h - \psi \parallel_2 \to 0$ *при* $h \to 0$, *то* $u_h(x,t)$ *сходится к* $u(x,t)$ *равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$, *т.е.* $u(x,t)$ *есть обобщенное решение задачи* (1)–(3).

3. $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение берем таким же, что и в п. 2.

Лемма 9. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится всюду, а ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и справедливы оценки*

$$\| u_0(x,t) \|_{L_2(Q_T)} \leq C_T \| \psi \|_1, \quad \max_{Q_T} |u_1(x,t)| \leq C_T \| \psi \|_1,$$

где C_T зависит только от T, $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Теорема 3. *Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) сходится всюду по x и t и $u(x,0) = 0$. Если $\psi_h(x)$ — та же, что и $\psi(x)$ в теореме 1 и $\| \psi_h - \psi \|_1 \to 0$, при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$ сходится к $u(x,t)$ в $L_2(Q_T)$ при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3) для $\psi(x) \in L[0,1]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Свойства формального решения смешанной задачи для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронеж. весен. матем. шк. «Понтрягинские чтения – XXVII» (3–9 мая 2016 г.) Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2016. С. 170–173.

УДК 534.1

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, И. В. Корпен, С. Н. Косинова (Сызрань, Россия)

vladlitvinov@rambler.ru

При решении задач о колебаниях механических объектов с движущимися границами возникает необходимость в решении следующего функционального уравнения [1, 2]:

$$\varphi\big(\tau + l(\tau)\big) - \varphi\big(\tau - l(\tau)\big) = 1, \tag{1}$$

где τ — безразмерное время, $l(\tau)$ — закон движения границы. Задача состоит в нахождении $\varphi(z)$ при различных значениях $l(\tau)$. В общем случае методика нахождения точного решения уравнения (1) неизвестна. Для решения используется обратный метод, т.е. по заданной функции $\varphi(z)$ находится $l(\tau)$. Например, для функции

$$\varphi(z) = \frac{\ln\big[(vz+1)/(1-v)\big]}{\ln\big[(1+v)/(1-v)\big]} - 1 \tag{2}$$