

2. Горяйнов В. В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

УДК 517.518.2

## НЕПРЕРЫВНЫЕ СУММЫ РИДЖ-ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ

А. А. Кулешов (Москва, Россия)  
kuleshov.a.a@yandex.ru

Пусть  $n \geq 2$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  - некоторое множество. Ридж-функцией на  $E$  будем называть функцию вида  $\varphi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_j x_j$  и  $\varphi$  - действительнозначная функция, определенная на  $\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$ . На множестве  $E$  рассмотрим сумму ридж-функций

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}). \quad (1)$$

Всюду мы будем предполагать, что векторы  $\mathbf{a}^i$  попарно неколлинеарны. Обозначим  $\Delta_i = \Delta(\mathbf{a}^i)$ . Замкнутое выпуклое множество  $E \subset \mathbb{R}^n$ , для которого  $\text{int}(E) \neq \emptyset$ , называется выпуклым телом.

Функцию  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть аддитивной, если она удовлетворяет функциональному уравнению Коши:  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ . Под аддитивной функцией  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ , определенной на некотором подмножестве  $J \subset \mathbb{R}$ , будем понимать сужение некоторой аддитивной на  $\mathbb{R}$  функции на множество  $J$ .

Пусть каждому интервалу  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ , где  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ , поставлен в соответствие некоторый класс  $B_{(\alpha, \beta)}$  определенных на  $(\alpha, \beta)$  действительных функций так, что выполнены следующие три условия:

- 1) Из того, что  $f \in B_{(\alpha, \beta)}$ ,  $r \in C(\alpha, \beta)$ , а функция  $f - r$  является аддитивной на  $(\alpha, \beta)$ , следует, что  $f(x) - r(x) = cx$ , где  $x \in (\alpha, \beta)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $\forall h \in \mathbb{R}, |h| < \beta - \alpha : f \in B_{(\alpha, \beta)} \Rightarrow \Delta_h f \in B_J$ , где  $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$ ,  $J = (\alpha, \beta) \cap (\alpha - h, \beta - h)$ .
- 3)  $\forall (c, d) \subset (\alpha, \beta) : f \in B_{(\alpha, \beta)} \Rightarrow f \in B_{(c, d)}$ .

Известно, что любая аддитивная на интервале функция, являющаяся также локально ограниченной или измеримой по Лебегу, линейна. Поэтому вышеприведенные условия будут выполнены, в частности, если в качестве  $B_{(\alpha, \beta)}$  брать объединение множества локально ограниченных на  $(\alpha, \beta)$  функций и множества измеримых по Лебегу на  $(\alpha, \beta)$  функций.

Для функции  $f$ , интегрируемой на множестве  $E$  конечной меры, определим её среднее на  $E$  значение

$$f_E := \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx.$$

**Определение 1.** Пусть  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Будем говорить, что локально интегрируемая функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  принадлежит классу  $VMO[a, b]$ , если выполнено равенство

$$\lim_{d-c \rightarrow 0} \frac{1}{d-c} \int_{[c,d]} |f(x) - f_{[c,d]}| dx = 0,$$

где предел берется по отрезкам  $[c, d] \subset [a, b]$ ,  $-\infty < c < d < +\infty$ .

Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $E$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f$  вида (1) непрерывна на  $E$ , функции  $\varphi_i \in B_{int(\Delta_i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), и пусть  $[a, b] \subset \subset \Delta_i$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . Тогда  $\varphi_i \in VMO[a, b]$ .

Далее для функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  определим её модуль непрерывности в точке  $\mathbf{x}^0 \in E$

$$\omega(f, \mathbf{x}^0, t) := \sup_{\|\mathbf{h}\| \leq t, \mathbf{x}^0 + \mathbf{h} \in E} |f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)|.$$

Отметим, что из непрерывности функции  $f$  на  $E$  вытекает, что  $\omega(f, \mathbf{x}^0, t)$  — непрерывная неубывающая функция на полуправой  $t \geq 0$ , подчиненная условию  $\omega(f, \mathbf{x}^0, 0) = 0$ .

Теперь сформулируем результат в терминах модуля непрерывности функции  $f$  в граничных точках  $E$ .

**Теорема 2.** Пусть  $E$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f$  вида (1) непрерывна на  $E$ , функции  $\varphi_i \in B_{int(\Delta_i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Пусть  $a$  — граничная точка множества  $\Delta_i$  и для некоторого  $\mathbf{x}^0 \in E$  такого, что  $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}^0 = a$ , модуль непрерывности  $\omega(t) := \omega(f, \mathbf{x}^0, t)$  удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty. \quad (2)$$

Тогда существует конечный предел  $A := \lim_{t \rightarrow a} \varphi_i(t)$ .

При этом найденное условие (2) на модуль непрерывности функции  $f$  в точке  $\mathbf{x}^0$  в теореме 2 является неулучшаемым, а именно верна следующая

**Теорема 3.** Пусть  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная неубывающая функция, подчиненная условию  $\omega(0) = 0$ , для которой условие (2) не выполнено. Пусть  $n = 2$ ,  $E = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_1 \leq x_2 \leq 2x_1\}$ . Тогда найдется непрерывная на  $E$  функция  $f$  вида

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$$

такая, что

$$\omega(f, \mathbf{0}, \delta) = \omega(\delta)$$

при  $\delta \geq 0$ , при этом  $\varphi \in C(0, +\infty)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = -\infty$ .

При выполнении условий теоремы 2 может случиться так, что функция  $\varphi_i$  имеет скачок в точке  $a$ . Возникает вопрос: существует ли представление функции  $f$  в виде (1), в котором  $\varphi_i$  непрерывна в  $a$ ? Оказывается, верна следующая

**Теорема 4.** Пусть  $E$  – выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ , функция  $f$  вида (1) непрерывна на  $E$ , функции  $\varphi_i \in B_{int}(\Delta_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Пусть для некоторого  $\mathbf{x}^0 \in E$  и для всех  $i = 1, \dots, m$  существуют пределы  $\lim_{t \rightarrow a_i} \varphi_i(t) =: b_i$ , где  $a_i := \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}^0$ . Тогда при одновременной замене всех значений  $\varphi_i(a_i)$  числами  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) значения функции  $f$  на  $E$  не изменяются.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. В. Конягин, А. А. Кулешов. О непрерывности конечных сумм ридж-функций // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 2. С. 308-309.
2. С. В. Конягин, А. А. Кулешов. О некоторых свойствах конечных сумм ридж-функций, определенных на выпуклых подмножествах  $\mathbb{R}^n$  // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 193 - 200.
3. А. А. Кулешов. О некоторых свойствах гладких сумм ридж-функций // Тр. МИАН. 2016. Т. 294. С. 99 - 104.
4. А. А. Кулешов. Непрерывные суммы ридж-функций на выпуклом теле и класс VMO // Матем. заметки., 2017, т. 102, вып. 6, стр. 851-858.

УДК 517.4

## КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ЛАКУНАРНОСТИ В ЗПЛ ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов (Владимир, Россия)  
levizov@rambler.ru

Рассматривается система функций Уолша–Пэли  $\{\varphi_n(x)\}$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  (подробное определение см., например, в [1]);  $\{n(k)\}$  – некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов (номеров).