в указанных направлениях, то её автоматически полагаем вертикально сбалансированной.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < \infty$. *Если система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в любой выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) > 2\pi\tau$, *и полна в любой вертикально сбалансированной выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) \leqslant 2\pi\tau$, *то необходимо выполнения равенства* $\bar{n}(\Lambda) = \tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А. Ф.* О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе // Матем. сб. 1955. Т. 36, вып. 3. С. 555–568.

2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956. 632 с.

3. *Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф.* Об одной теореме Леонтьева – Левина // Уфимск. матем. жур. 2017. Т. 9, вып. 3. С. 89–101.

4. *Koosis P.* The logarithmic integral I. N.Y. : Cambridge Univ. Press, 1997. 625 p.

УДК 517.54

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ОБЛАСТЕЙ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ [1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия)

Kudryavceva_OS@mail.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — класс голоморфных функций, отображающих правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ в себя. Как известно (см. [1]), для каждой $f \in \mathcal{H}$ существует неотрицательный угловой предел $\angle \lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = f'(\infty)$, называемый угловой производной функции f на бесконечности. В том случае, когда эта производная положительна, функция f однолистна в некотором секторе.

Теорема А. (Валирон, [1]) *Пусть* $f \in \mathcal{H}$, *причём* $f'(\infty) > 0$. *Для любого* $k > 0$ *найдётся* $R > 0$ *такое, что* f *однолистна в секторе* $\{z \in \mathbb{H}\colon |\operatorname{Im} z| < k\operatorname{Re} z,\ |z| > R\}$.

Заметим, что значение R зависит не только от величины угла сектора, но и от функции f. Разумеется, выбрать единое значение R на всем классе H не представляется возможным, сколь бы малое k мы не брали.

Целью данной работы является выделение областей однолистности на подклассах класса $\mathcal{H}$, состоящих из функций, удовлетворяющих дополнительным условиям.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00042 мол_а).

Пусть $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{H}\colon f(1) = 1,\ \angle \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty\}$. Известно, что при таких условиях $f'(\infty) \in [0, 1]$.

Обозначим $\mathcal{B}(c) = \{f \in \mathcal{B}\colon f'(\infty) = c\}$.

Наибольший интерес представляет случай, когда $c \in (1/2, 1)$. Как показано в [2], в этом случае можно выделить единую область однолистности на всем классе $\mathcal{B}(c)$, содержащую сектор, включающий неподвижную точку $z = 1$.

Теорема B. (Горяйнов, [2]) *Пусть $f \in \mathcal{B}(c)$, $1/2 < c < 1$. Тогда f однолистна в области*

$$G(c) = \left\{ z \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{1-c} - \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{2c-1} > \frac{1}{c} \right\}.$$

Показано также, что на классе таких областей (границей которых является ветвь гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$) установленный результат неулучшаем.

Для каждой $f \in \mathcal{B}(c)$ обозначим через S_f область однолистности функции f, содержащую луч $\{z \in \mathbb{H}\colon \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \geqslant 1\}$. Через $S(c)$ обозначим пересечение областей S_f по всем $f \in \mathcal{B}(c)$. Результат теоремы B можно интерпретировать следующим образом: при $c \in (1/2, 1)$ область $S(c)$ непустая, причем $G(c) \subset S(c)$.

Нами получены двусторонние оценки области $S(c)$, усиливающие результат теоремы B.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{B}(c)$, $1/2 < c < 1$. Тогда f однолистна в области*

$$\underline{S}(c) = \left\{ z \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{1-c} - \frac{3\,(\operatorname{Im} z)^2}{4c-1} > \frac{1}{c} \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $c \in (1/2, 1)$. Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{S}(c) = \left\{ z \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{1-c} - (\operatorname{Im} z)^2 > \frac{1}{c} \right\}$$

найдётся функция $f \in \mathcal{B}(c)$, производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Из теорем 1 и 2 следует двусторонняя оценка $\underline{S}(c) \subset S(c) \subset \overline{S}(c)$. Заметим, что различие между областями $\underline{S}(c)$ и $\overline{S}(c)$ невелико. В то же время область $\underline{S}(c)$ существенно больше области $G(c)$, особенно при c близких к $1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М. : ГИТТЛ, 1957. 235 с.

2. *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

УДК 517.518.2

НЕПРЕРЫВНЫЕ СУММЫ РИДЖ-ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ

А. А. Кулешов (Москва, Россия)
kuleshov.a.a@yandex.ru

Пусть $n \geq 2$, $E \subset \mathbb{R}^n$ - некоторое множество. Ридж-функцией на E будем называть функцию вида $\varphi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ и φ– действительнозначная функция, определенная на $\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$. На множестве E рассмотрим сумму ридж-функций

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}). \tag{1}$$

Всюду мы будем предполагать, что векторы $\mathbf{a}^i$ попарно неколлинеарны. Обозначим $\Delta_i = \Delta(\mathbf{a}^i)$. Замкнутое выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, для которого $int(E) \neq \emptyset$, называется выпуклым телом.

Функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть аддитивной, если она удовлетворяет функциональному уравнению Коши: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Под аддитивной функцией $\varphi : J \to \mathbb{R}$, определенной на некотором подмножестве $J \subset \mathbf{R}$, будем понимать сужение некоторой аддитивной на $\mathbb{R}$ функции на множество J.

Пусть каждому интервалу $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, поставлен в соответствие некоторый класс $B_{(\alpha,\beta)}$ определенных на (α, β) действительных функций так, что выполнены следующие три условия:
1) Из того, что $f \in B_{(\alpha,\beta)}$, $r \in C(\alpha, \beta)$, а функция $f - r$ является аддитивной на (α, β), следует, что $f(x) - r(x) = cx$, где $x \in (\alpha, \beta), c \in \mathbb{R}$.
2) $\forall h \in \mathbb{R}, |h| < \beta - \alpha : f \in B_{(\alpha,\beta)} \Rightarrow \Delta_h f \in B_J$, где $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x), J = (\alpha, \beta) \cap (\alpha - h, \beta - h)$.
3) $\forall (c, d) \subset (\alpha, \beta) : f \in B_{(\alpha,\beta)} \Rightarrow f \in B_{(c,d)}$.
Известно, что любая аддитивная на интервале функция, являющаяся также локально ограниченной или измеримой по Лебегу, линейна. Поэтому вышеприведенные условия будут выполнены, в частности, если в качестве $B_{(\alpha,\beta)}$ брать объединение множества локально ограниченных на (α, β) функций и множества измеримых по Лебегу на (α, β) функций.