единицы. Положим

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = q_\Lambda(z,\lambda_m,\delta)\left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{-n_m}, \qquad S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{m\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Из определения величины S_Λ следует неравенство $S_\Lambda \le 0$. Равенство $S_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Примеры вычисления характеристики S_Λ для различных последовательностей можно найти в книге [6].

Теорема. *Пусть Λ — правильная последовательность, $f \in F(\Lambda)$ и K — сопряженная диаграмма функции f. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. Для каждой последовательности $d \in \mathfrak{U}(\Lambda)$ такой, что множество $\Omega(D(\Lambda,d),K)$ не пусто и отлично от плоскости, и любой точки $w \in \partial\Omega(D(\Lambda,d),K)$ функция $g_d(z)$ имеет хотя бы одну особую точку на множестве $(w+K)\cap\partial D(\Lambda,d)$.

2. Имеет место равенство $S_\Lambda = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Братищев А. В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.

2. *Кривошеева О. А.* Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, вып. 3 (21). С. 96–103.

3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956.

4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976.

5. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, вып. 2. С. 71–136.

6. *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С., Абдулнагимов А. И.* Целые функции экспоненциального типа. Ряды Дирихле. Уфа : РИЦ БашГУ, 2015. 196 с.

УДК 517.986.62

ГРАФЫ В АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ СТУПЕНЧАТОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, Россия)
KrussUS@gmail.com

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей, где лишь конечное число членов с отрицательными номерами имеют ненулевое значение: $(\dots,\mathbf{0}_{i-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\dots)$, $\mathbf{x}_i \in GF(p^s)$, $GF(p^s)$ — конечное поле [1]. Нулевой элемент поля $GF(p^s)$ имеет вид $\mathbf{0} = (0_0,0_1,\dots,0_{s-1})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Окрестностями нулевого элемента поля $F^{(s)}$ — $0 = (\dots,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\dots)$, являются множества $F_n^{(s)}$ $(F_n^{(s)} \subset F_{n-1}^{(s)})$

$$F_n^{(s)} = \{a = (\dots,\mathbf{0},\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_{n+1},\dots):\ \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Масштабирующая функция φ удовлетворяет следующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} c_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \quad \sum_{h\in H_0} |c_h|^2 < +\infty, \tag{1}$$

где $c_h \in \mathbb{C}$. Уравнение (1) называется масштабирующим уравнением.

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ множество ступенчатых функций $f \in$ $\in L_2(F^{(s)})$ таких, что $\operatorname{supp} f \subset F_{-N}^{(s)}$ и f постоянна на множествах вида $F_M^{(s)} \dot{+} g$.

Для функций с компактным носителем, масштабирующее уравнение (1) содержит сумму с конечным числом слагаемых:

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} c_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \tag{2}$$

где $H_0^{(N)} = \{x \in F^{(s)} : x = \mathbf{a}_{-1}g_{-1} \dot{+} \mathbf{a}_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{a}_{-N}g_{-N},\ N \in \mathbb{N},$ $\mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s)\}$.

Уравнение (2) может быть записано в виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m^{(\mathbf{0})}(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}),$$

где $m^{(\mathbf{0})}(\chi) = \sum\limits_{h\in H_0^{(N+1)}} c_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$ — маска уравнения (2).

В работе [1] был предложен алгоритм построения масштабирующей функции из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-1}^{(s)})$, с дополнительным ограничением: абсолютные значения преобразования Фурье масштабирующей функции это 0 либо 1. В 2016 году в работе [2] данный алгоритм был обобщен для функций из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, кроме того удалось избавиться от ограничения на абсолютные значения преобразования Фурье, которые теперь могут принимать значения из [0,1]. Изложим данный алгоритм.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Выберем простое число p и зафиксируем. Построим N-валидное дерево T.

Шаг 2. По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$. Каждая вершина дерева $\tilde{T}$ представляет собой N-мерный вектор элементов поля $GF(p^s)$: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Строятся эти вершины следующим образом: если

в дереве T с вершины $\mathbf{a}_N$ начинался путь из N элементов в направлении к корню $\mathbf{a}_N \to \mathbf{a}_{N-1} \to \cdots \to \mathbf{a}_1$, то в новом дереве $\tilde{T}$ образуем вершину, которая имеет значение равное N-мерному вектору $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \ldots, \mathbf{a}_1)$. Таким образом, корнем дерева $\tilde{T}$ является N-мерный вектор, составленный из нулевых элементов поля $GF(p^s)$ $\mathbf{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$. Вершины 1-го уровня дерева $\tilde{T}$ представляют собой N-мерные векторы, у которых на всех местах, кроме первого, стоят нулевые элементы поля $GF(p^s)$: $(\mathbf{a}_i, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$, $\mathbf{a}_i$ - какая-то вершина N-го уровня дерева T. Вершины 2-го уровня дерева $\tilde{T}$ представляют собой N-мерные векторы: $(\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$, $\mathbf{a}_{i_2}$ и $\mathbf{a}_{i_1}$ какие-то связанные друг с другом вершины дерева T уровней $N+1$ и N соответственно. Причем в данном примере $\mathbf{a}_{i_1} \neq \mathbf{0}$, а $\mathbf{a}_{i_2}$ уже может быть нулевым элементом поля $GF(p^s)$. Если мы обозначим через H высоту дерева T, а через $\tilde{H}$ высоту дерева $\tilde{T}$, то очевидно $\tilde{H} = H - N + 1$.

Шаг 3. Теперь преобразуем дерево $\tilde{T}$ к графу Γ добавив некоторое количество новых ребер по следующим правилам:

1) достраивать ребра можно только из вершин более высокого уровня к вершинам более низкого уровня,

2) вершину $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \ldots, \mathbf{a}_1)$ дерева $\tilde{T}$ можно связывать только с вершинами вида $(\mathbf{a}_{N-1}, \ldots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$, то есть первые $(N-1)$ элементов которых совпадают с последними $(N-1)$ элементами вершины $\mathbf{A}$.

Вершины, с которыми вершина $\mathbf{A}_N$ связана, мы будем обозначать $(\mathbf{a}_{N-1}, \ldots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$. То есть $\mathbf{a}_0 \in \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина $\mathbf{A}_N$ связана с вершиной $(\mathbf{a}_{N-1}, \ldots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$ в графе Γ.

Шаг 4. Если вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \ldots, \mathbf{a}_1)$ в графе Γ связана с вершинами $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2} \ldots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$ то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} |m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \ldots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\tilde{\mathbf{a}}_0})|^2 = 1 \text{ и}$$

$$m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \ldots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{a}_0 \notin \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}. \quad (3)$$

Также, определим $m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}) = 1$.

Теорема 3 [2]. *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m^{(\mathbf{0})}(\chi)$ так, как указано в равенствах* (3). *Пусть Пусть $\tilde{H}$– высота дерева $\tilde{T}$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m^{(\mathbf{0})}(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, порождающую кратномасштабный анализ, причем M не превышает $\tilde{H} - N$.

Рассмотрим теперь задачу построения графа по заданной функции. Аналогичная задача для групп Виленкина изложена в работе [3]. Пусть функция $\varphi(x)$ - масштабирующая функция из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$. По преобразованию Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ функции $\varphi(x)$ построим граф по алгоритму 2.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Рассмотрим ненулевые значения функции $\hat{\varphi}$.

$\hat{\varphi}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}\dots\mathbf{r}_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})\cdot m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+2}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_0}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_1})\dots m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{M-1}})\cdot m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp})$.

Шаг 2. Так как мы выбрали ненулевое значение $\hat{\varphi}$, то каждый сомножитель отличен от нуля. Для каждого такого $m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_j}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{j+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{j+N-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_{j+N}})$ строим в нашем графе ребро $(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_{j+N-1})$ - $(\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2},\dots,\mathbf{a}_{j+N})$

Теорема 4. *Множество графов, построенных по алгоритму 1, совпадает с множеством графов, построенных по алгоритму 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukomskii S., Vodolazov A.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, iss. 2. P. 1415—1440.

2. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic // Turk. J. Math. 2017. Vol. 41, № 2. P. 244–253.

3. *Бердников Г. С.* Связь между необходимым и достаточным условиями масштабирующей функции на группах Виленкина // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 111–112.

УДК 517.53/.55

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А. Ф. Кужаев (Уфа, Россия)

arsenkuz@outlook.com

Будем говорить, что некоторая система функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна в области $D\subseteq\mathbb{C}$, если он полна в пространстве функций, аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D. В 1955 г. А. Ф. Леонтьевым была опубликована работа [1], в которой были сформулированы достаточные условия полноты системы $\{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$ в криволинейной полосе т. е. в области вида

$$\{x+iy\in\mathbb{C}\mid f(x)<y<f(x)+2\pi a\},$$