Автор благодарит научного руководителя профессора И. В. Тихонова за постановку и обсуждение задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карев А. В., Тихонов И. В.* О распределении нулей одной целой функции типа Миттаг–Леффлера, важной для теории обратных задач // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017 : материалы науч. конф., 10–14 апреля 2017. С. 122–128.

2. *Карев А. В., Тихонов И. В.* Распределение нулей одной целой функции типа Миттаг–Леффлера с приложениями в теории обратных задач // Челяб. физ.-матем. журн. 2017. Т. 2, вып. 4. С. 430–446.

3. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 167–188.

4. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113.

5. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. матем. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

6. *Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р.* Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений // Соврем. матем. Фундам. направл. 2016. Т. 62. С. 140–151.

УДК 517.518.22

## НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОСТОЯННЫМИ И УСЛОВИЯ КОМПАКТНОСТИ В $L^p$, $p > 0$

**И. Н. Катковская, В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)**
inkatkovskaya@bntu.by, krotov@bsu.by

Пусть $(X, d, \mu)$ — ограниченное метрическое пространство с метрикой $d$ и борелевской мерой $\mu$. Будем обозначать открытый шар и сферу с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ соответственно как

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}, \quad C(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}.$$

Если $p > 0$ и функция $f \in L^p(X)$, то для любого шара $B \subset X$ существует такое число $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$, что

$$\inf_{I \in \mathbb{R}} \int\limits_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y) = \int\limits_B |f(y) - I_B^{(p)} f|^p \, d\mu(y).$$

При $p > 1$ такое число $I_B^{(p)} f$ единственно. Если же $0 < p \leq 1$, то постоянная наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ может определяться неоднозначно. Легко убедиться в том, множество таких чисел ограничено и замкнуто, поэтому определены следующие величины:

$$\mathbb{I}_B^{(p)} f = \inf I_B^{(p)} f, \quad \mathbf{I}_B^{(p)} f = \sup I_B^{(p)} f.$$

В следующих двух теоремах рассматриваются их свойства непрерывности.

**Теорема 1.** *Если $p > 0$, то для любого шара $B \subset X$*

*1) функция $f \mapsto \mathbb{I}_B^{(p)} f$, $f \in L^p(B)$, полунепрерывна снизу на $L^p(B)$;*

*2) функция $f \mapsto \mathbf{I}_B^{(p)} f$, $f \in L^p(B)$, полунепрерывна сверху на $L^p(B)$.*

Далее всюду ниже предполагается выполненным условие удвоения: существует такая постоянная $a_\mu \geq 1$, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ r > 0.$$

**Теорема 2.** *Пусть $p > 0$, $x_0 \in X$, $r > 0$ и*

$$\mu(C(x_0, r)) = 0. \tag{1}$$

*Тогда*

*1) функция*

$$x \mapsto \mathbb{I}_{B(x,r)}^{(p)} f, \quad x \in X, \tag{2}$$

*полунепрерывна снизу в точке $x_0$;*

*2) функция*

$$x \mapsto \mathbf{I}_{B(x,r)}^{(p)} f, \quad x \in X,$$

*полунепрерывна сверху в точке $x_0$.*

Отметим, что наличие условия (1) в теореме 2 существенно для ее справедливости. Без него утверждение теоремы 2 теряет силу.

**Теорема 3.** *Пусть выполнено условие*

$$\mu(C(x, r)) = 0, \quad r > 0,\ x \in X. \tag{3}$$

*Пусть еще $p \geq q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество.*

*Тогда условие*

$$\lim_{r \to +0} \sup_{f \in S} \int_X |f(x) - \mathbb{I}_{B(x,r)}^{(q)} f|^p \, d\mu(x) = 0. \tag{4}$$

*необходимо и достаточно для полной ограниченности $S$.*

Рассмотрение условий компактности такого рода и было поводом для изучения свойств наилучших приближений $\mathbb{I}_B^{(p)} f$ и $\mathbf{I}_B^{(p)} f$. Благодаря теореме 2 формулировка теоремы 3 корректна, так как функция (2) измерима на $X$.

Утверждение теоремы 2 является аналогом классического критерия компактности Колмогорова [1] для пространств $L^p$, $p \geq 1$, на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^n$, в котором на месте наилучших приближений $\mathbb{I}_{B(x,r)}^{(q)} f$ находятся интегральные средние функции $f$ по шару $B(x, r)$

(случай $p = 1$ рассмотрен в работе [2]). Однако интегральные средние можно использовать только при $p \geq 1$. Отметим еще работу [4], в которой также обсуждается критерий Колмогорова.

В случае метрических пространств с мерой в работе [3] указаны весьма широкие условия, при которых справедлив критерий компактности Колмогорова.

Для неограниченных $X$ критерий Колмогорова теряет силу и условие (3) (с интегральными средними на месте $\mathbb{I}^{(q)}_{B(x,r)}f$) уже не является достаточным для полной ограниченности множества $S$. Это впервые обнаружил Тамаркин [5], который также указал необходимое дополнительное условие для справедливости критерия Колмогорова для $L^p$, $p > 1$. В случае $p = 1$ аналогичный результат был получен в [2]. Для метрических пространств с мерой этот вопрос изучался в [6].

Аналог теоремы 3 для случая неограниченных пространств $X$ формулируется в следующем утверждении.

**Теорема 4.** *Пусть выполнено условие (3), $p \geq q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество.*

*Тогда $S$ вполне ограничено в том и только том случае, если выполнено (4) и для некоторого $x_0 \in X$*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} |f(x)|^p \, d\mu(x) = 0.$$

Другие условия компактности в пространствах $L^p$ при $p > 0$ имеются в [7], где также подробно изложениа история вопроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A. N.* Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1931. Vol. 9, iss. 1. P. 60–63.

2. *Tulajkov A.* Zur Kompaktheit im Raum $L^p$ für $p = 1$ // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1933. Vol. 39. P. 167–170.

3. *Kałamajska A.* On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. Vol. 24, № 1. P. 123–132.

4. *Hanche-Olsen H., Holden H.* The Kolmogorov – Riesz compactness theorem // Expo. Math. 2010. Vol. 28, № 4. P. 385–394.

5. *Tamarkin J. D.* On the compactness of the space $L^p$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 38, № 2. P. 79–84.

6. *Gorka P., Macios A.* The Riesz – Kolmogorov theorem on metric spaces // Miskolc Math. Notes. 2014. Vol. 15, № 2. P. 459–465.

7. *Кротов В. Г.* Критерии компактности в пространствах $L^p$, $p > 0$ // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 7. P. 129–148.