В этом случае в результате вычислений получаем условие

$$\int_{\partial S} \varphi_2(s)\, ds_x = 0.$$

Других тождеств определяемых из теоремы для бигармонических функций, кроме указанного выше нет. Заметим, что это необходимое условие существования решения задачи типа Неймана было получено в [5]. Оно является также и достаточным условием существования такой бигармонической функции.

Другие тождества для нормальных производных полигармонических функций получены в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карачик В. В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Матем. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 69–88.

2. *Karachik V. V.* On the mean-value property for polyharmonic functions // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2013. Т. 6, № 3. С. 59–66.

3. *Карачик В. В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 228–238.

4. *Карачик В. В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. XVI, № 4(56). С. 61–74.

5. *Карачик В. В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Матем. тр. 2016. № 2. С. 86–108.

6. *Карачик В. В.* Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 533–551.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ СПЕЦИАЛЬНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

А. В. Карев (Москва, Россия)
alexander.karev.30@mail.com

Недавно проведено подробное исследование [1, 2] специальной обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E с областью определения $D(A) \subset E$. Элемент $g \in E$ неизве-

стен. Для одновременного нахождения функции $u(t)$ и элемента g возьмем условия

$$u(0) = u_0, \qquad \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)\,dt = u_1. \tag{2}$$

Элементы $u_0, u_1 \in D(A)$ считаем заданными. Решением задачи (1), (2) назовем пару $(u(t), g)$, где $u\colon [0,T] \to E$, $g \in E$. Предполагаем, что $u \in C^1([0,T]; E)$, причем $u(t) \in D(A)$ при любом $t \in [0,T]$.

Обратная задача (1), (2) является частным примером к общей теории, разработанной в [3, 4]. По схеме, развитой в [4], свойство корректности обратной задачи (1), (2) должно выражаться в терминах характеристической функции

$$L_T(\lambda) \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}\,ds \;=\; \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda^2\, T}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Как выяснилось, справедлив следующий критерий единственности решения обратной задачи (1), (2), действующий без каких-либо дополнительных предположений об операторе A, кроме линейности и замкнутости (см. [1, 2]).

Теорема 1. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E. Для того чтобы обратная задача* (1), (2) *при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$ имела не более одного решения $(u(t), g)$ необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L_T(\lambda)$ из формулы* (3) *не являлся собственным значением оператора A.*

Для последующих применений теоремы 1 было изучено распределение нулей функции (3) на комплексной плоскости (см. [1, 2]). В частности доказано, что нули лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 2/T$ и не принадлежат полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant 7\pi/(3T)$.

Возникает вопрос о различных примерах операторов A, имеющих ту или иную конфигурацию спектра на комплексной плоскости. Интересные примеры, в частности, встречаются в теории эллиптических операторов с нелокальными условиями по пространственным переменным (см. [5]). Следуя [6], рассмотрим простой одномерный оператор $A = d^2/dx^2$ в пространстве $L_2[0,2]$ с областью определения

$$D(A) = \left\{u \in H^2[0,2]: \quad u(0) = b_1 u(1), \quad u(2) = b_2 u(1)\right\}, \tag{4}$$

где b_1, b_2 — вещественные параметры.

Спектр оператора A зависит от величины $b = (b_1 + b_2)/2$. Так, при любом $b \in \mathbb{R}$ оператор A имеет серию вещественных собственных значений

$$z_{1,k} = -(\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

при $-1 \leqslant b < 1$ имеется еще одна вещественная серия

$$z_{2,k}^{(\pm)} = -\left(\pm \arccos b + 2\pi k\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

при $b \geqslant 1$ появляется комплексная серия

$$z_{3,k}^{(\pm)} = \ln^2\left(b + \sqrt{b^2-1}\right) - (2\pi k)^2 \pm 4k\pi i \ln\left(b + \sqrt{b^2-1}\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и при $b < -1$ появляется комплексная серия

$$z_{4,k}^{(\pm)} = \ln^2\left(-b + \sqrt{b^2-1}\right) - (2k+1)^2\pi^2 \pm (4k+2)\pi i \ln\left(-b + \sqrt{b^2-1}\right),$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, а i — мнимая единица.

Обратим внимание, что в зависимости от параметра b спектр оператора A может быть как вещественным, так и отчасти комплексным. Возможны также комплексные собственные значения, выходящие в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$, где встречаются нули характеристической функции $L_T(\lambda)$.

Используя изложенные соображения, рассмотрим обратную задачу

$$u_t = u_{xx} + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$u(0,t) = b_1 u(1,t), \quad u(2,t) = b_2 u(1,t), \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(x,t)\,dt = u_1(x), \tag{7}$$

с заданными функциями $u_0(x)$, $u_1(x)$ и неизвестными $u(x,t)$, $g(x)$. Справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$-2\operatorname{ch}\pi \leqslant b_1 + b_2 \leqslant 2\operatorname{ch}2\pi. \tag{8}$$

Тогда при любом выборе функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ из множества (4) *обратная задача* (5)–(7) *имеет не более одного решения* $(u(x,t), g(x))$.

Как видим, условие (8) является несимметричным. Отдельно показано, что при его нарушении можно подобрать счетное множество значений $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, при которых единственность решения в обратной задаче (5)–(7) будет отсутствовать.

Автор благодарит научного руководителя профессора И. В. Тихонова за постановку и обсуждение задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карев А. В., Тихонов И. В.* О распределении нулей одной целой функции типа Миттаг–Леффлера, важной для теории обратных задач // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017 : материалы науч. конф., 10–14 апреля 2017. С. 122–128.

2. *Карев А. В., Тихонов И. В.* Распределение нулей одной целой функции типа Миттаг–Леффлера с приложениями в теории обратных задач // Челяб. физ.-матем. журн. 2017. Т. 2, вып. 4. С. 430–446.

3. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 167–188.

4. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113.

5. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. матем. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

6. *Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р.* Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений // Соврем. матем. Фундам. направл. 2016. Т. 62. С. 140–151.

УДК 517.518.22

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОСТОЯННЫМИ И УСЛОВИЯ КОМПАКТНОСТИ В L^p, $p > 0$

И. Н. Катковская, В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)
inkatkovskaya@bntu.by, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ. Будем обозначать открытый шар и сферу с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ соответственно как

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}, \quad C(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}.$$

Если $p > 0$ и функция $f \in L^p(X)$, то для любого шара $B \subset X$ существует такое число $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$, что

$$\inf_{I \in \mathbb{R}} \int\limits_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y) = \int\limits_B |f(y) - I_B^{(p)} f|^p \, d\mu(y).$$

При $p > 1$ такое число $I_B^{(p)} f$ единственно. Если же $0 < p \leq 1$, то постоянная наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ может определяться неоднозначно. Легко убедиться в том, множество таких чисел ограничено и замкнуто, поэтому определены следующие величины:

$$\mathbb{I}_B^{(p)} f = \inf I_B^{(p)} f, \quad \mathbf{I}_B^{(p)} f = \sup I_B^{(p)} f.$$