УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
IgnatievMU@info.sgu.ru

Обозначим через J^α оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля:

$$J^\alpha f(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt,$$

через D^α, $\alpha = n - \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ — соответствующий оператор дробного дифференцирования:

$$D^\alpha f = \frac{d^n}{dx^n} J^\varepsilon f(x).$$

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ – спектр краевой задачи:

$$\begin{cases} Ly = \lambda y, \\ D^{\alpha-\nu} y(0) = 0, \ \nu = \overline{2, [\alpha]+1}, \\ D^{\alpha-1} y(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где L — интегро-дифференциальный оператор вида:

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1}, \ Mf(x) = \int\limits_0^x M(x-t)f(t)dt,$$

$\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. *По заданному спектру* $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ *найти* $M(x), x \in (0,1)$.

Основной результат настоящей работы содержит следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $M, \tilde{M} \in L_2(0,1)$ *таковы, что* $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2 \ldots$ *Тогда* $M(x) = \tilde{M}(x)$ *п.в. Таким образом, задание спектра краевой задачи (1) однозначно определяет оператор* L.

Доказательство теоремы носит конструктивный характер, процедура восстановления функции $M(x)$ сводится к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения второго рода.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

Для целых α аналогичные результаты были получены ранее в [1], сверточные возмущения оператора Штурма – Лиувилля исследовались в работах [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buterin S.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results Math. 2007. Vol. 50, № 3–4. P. 173–181.

2. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.

2. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма – Лиувилля по спектру // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

УДК 517.98

СИСТЕМЫ РИССА – ФИШЕРА В НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. И. Исмайлов (Баку, Азербайджан)

miqdadismailov1@rambler.ru

Пусть X — несепарабельное банахово пространство, I — некоторое несчетное множество индексов, I^a — множество не более чем счетных подмножеств I. Рассмотрим минимальную систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ с биортогональной системой $\{x^*_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X^*$. Пусть K — несепарабельное банахово пространство систем $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ скаляров таких, что $\{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} \in I^a$. Пространство K назовем CB-пространством, если система $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset K$, $\delta_\alpha = \{\delta_{\alpha\beta}\}_{\beta\in I}$ является несчетным безусловным базисом в K, т.е. $\forall\ \lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in K$ имеет место

$$\lambda = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha \delta_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\alpha_i} \delta_{\alpha_i},$$

где $\{\lambda_{\alpha_i}\}_{i\in N}$ — произвольная перестоновка элементов $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$. K называется монотонным, если из $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in K$ следует, что $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I'} \in K$, $\forall\ I' \subset I$ и $\left\|\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I'}\right\|_K \leq \left\|\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\right\|_K$.

Определение 1. Пару $\{x_\alpha; x^*_\alpha\}$ назовем *K-бесселевым*, если выполняется условие: $\forall\, x \in X$ $\{x^*_\alpha(x)\}_{\alpha\in I} \in K$. В случае, когда система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ полна в X и пара $\{x_\alpha; x^*_\alpha\}$ — K-бесселева в X, то систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем *K-бесселевой в X*.

Пару $\{x_\alpha; x^*_\alpha\}$ назовем *K-гильбертовым в X*, если выполняется условие: $\forall\ \lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in K$ $\exists\ x \in X$: $\lambda = \{x^*_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$. В случае, когда система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ полна в X и пара $\{x_\alpha; x^*_\alpha\}$ — K-гильбертова в X, то систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем *K-гильбертовой в X*.

Систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем *системой K-Рисса – Фишера в X*, если она является K-бесселевой и K-гильбертовой в X одновременно.