СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М. : Наука, 1975. 336 с.

2. *Lowner K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd. 89, S. 103–121.

3. *Куфарев П. П.* Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. 1996. Т. 13(55), вып. 1. С. 87-118.

4. *Pommerenke Ch.* Uber die Subordination analytischer Funktionen // J. Reine Angew. Math. 1965. Bd. 218, S. 159—173.

5. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Gottingen : Vandenhoeck and Ruprecht. 1975.

УДК 517.9

ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛЬНО И СЛАБО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Г. Е. Иванов (Долгопрудный, Россия)
g.e.ivanov@mail.ru

Различные классы множеств, обладающих усиленными или ослабленными свойствами выпуклости, рассматривались многими авторами в связи с приложениями в оптимизации, оптимальном управлении, теории и методах решения уравнения Гамильтона – Якоби, многозначном анализе, теории аппроксимаций и других разделах математики. Впервые понятие слабой выпуклости появилось в работе Ю. Г. Решетняка [1]. Затем Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [2] рассматривали a-выпуклые множества, представимые в виде пересечения дополнений к шарам фиксированного радиуса. Е. Майкл [3] ввел понятие паравыпуклых множеств и доказал теорему о существовании непрерывного селектора для многозначного отображения с паравыпуклыми значениями. Г. Федерер [4] ввел понятие множества положительной достижимости, как множества A, для которого точки из некоторой окрестности A обладают чебышевским свойством, т.е. имеют единственную ближайшую точку из множества A. Ж.-Ф. Виаль [5] рассматривал слабо выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, т.е. такие, что для любых двух достаточно близких точек этого множества, сильно выпуклый отрезок с концами в этих точках имеет еще хотя бы одну общую точку с множеством. Ф. Кларк, Р. Штерн и П. Воленски [6] ввели понятие проксимально гладкого множества, т.е. множества, для которого функция расстояния непрерывно дифференцируема в окрестности этого множества. В работах Р. Поликвина и Р.-Т. Рокафеллара [7], а затем в работах Ф. Бернарда, Л. Тибо и Н. Златевой [8, 9] рассматрились прокс-регулярные множества, т.е. множества, допускающих касание сферой в граничных точках.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00259-а).

В настоящем докладе приведены различные характеризации классов сильно и слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве, установлены взаимосвязи между перечисленными выше типами ослабленной и усиленной выпуклости множеств. Вводится понятие радиуса кривизны как локальной количественной характеристики параметров выпуклости множества в его граничной точке. Установлена связь глобальных и локальных характеристик сильной и слабой выпуклости множеств.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со сколярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Через $B_R(c)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса $R>0$ с центром $c\in H$. Пусть $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$ и ∂A — внутренность, замыкание и граница множества $A\subset H$. Для множества $A\subset H$ будем использовать следующие обозначения:

- $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y\in A}\|x-y\|$;
- $\sigma(p,A)=\sup\limits_{a\in A}\langle p,a\rangle$, $p\in H$ — опорная функция множества A;
- $d_A(x)=\inf_{a\in A}\|x-a\|$ — расстояние от точки x до множества A;
- $U_A(r)=\{x\in H:\ d_A(x)<r\}$ — r-окрестность множества A;
- $P_A(x)=\{a\in A:\|x-a\|=d_A(x)\}$ – метрическая проекция точки $x\in H$ на множество A;
- $N^P(a,A)=\{p\in H:\ \exists t>0:\ a\in P_A(a+tp)\}$ — конус проксимальных нормалей в точке $a\in\partial A$;
- $\delta_A(\varepsilon)=\sup\left\{\delta>0: B_\delta\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\subset A\quad \forall a_1,a_2\in A:\ \|a_1-a_2\|=\varepsilon\right\}$ – модуль выпуклости множества A;
- $\gamma_A(\varepsilon)=\inf\left\{\gamma\geq 0: B_\gamma\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\cap A\neq\emptyset\ \forall a_1,a_2\in A:\ \|a_1-a_2\|\leq\varepsilon\right\}$ — модуль невыпуклости множества A.

Определение 1. Множество $A\subset H$ называется *R-сильно выпуклым*, если существует множество $C\subset H$ такое, что $A=\bigcap\limits_{c\in C}B_R(c)$.

Определение 2. Множество $A\subset H$ называется *локально R-сильно выпуклым* в точке $a\in\partial A$, если существует $\varepsilon\in(0,R)$ такое, что множество $A\cap B_\varepsilon(a)$ является R-сильно выпуклым.

Определение 3. Для точек $x,y\in H$: $\|x-y\|\leq 2R$ множество $D_R(x,y)=\bigcap\limits_{c:\ x,y\in B_R(c)}B_R(c)$ называется *R-сильно выпуклым отрезком.*

Теорема 1. *Для выпуклого замкнутого множества $A\subset H$ и числа $R>0$ следующие условия эквивалентны:*

1) A *является* R*-сильно выпуклым;*

2) $\operatorname{diam} A \le 2R$ *и* $D_R(a_1, a_2) \subset A \quad \forall a_1, a_2 \subset A$*;*

3) $\operatorname{diam} A \le 2R$ *и* $\omega \subset A$ *для каждой дуги* ω *окружности радиуса* R *длины* $\le \pi R$ *с концами из множества* A*;*

4) опорный принцип: $A \subset B_R(a - Rp)\ \forall a \in \partial A\ \forall p \in N^P(a, A) : \|p\| = 1$*;*

5) $\langle p_1, a_1 - a_2\rangle \ge \frac{1}{2R}\|a_1 - a_2\|^2\ \ \forall a_1, a_2 \in A\ \forall p_1 \in N^P(a_1, A):\ \|p_1\| = 1$*;*

6) $\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2\rangle \ge \frac{1}{R}\|a_1 - a_2\|^2\ \ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N^P(a_i, A) : \|p_i\| = 1$, $i = 1, 2$*;*

7) $\|a_1 - a_2\| \le R\|p_1 - p_2\|\ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N(a_i, A) : \|p_i\| = 1,\ i = 1, 2$*;*

другими словами, градиент опорной функции $\nabla\sigma(\cdot, A)$ *существует на единичной сфере и удовлетворяет условию Липшица:* $\|\nabla\sigma(p_1, A) - \nabla\sigma(p_2, A)\| \le R\|p_1 - p_2\| \quad \forall p_1, p_2 \in \partial B_1(0)$*;*

8) $\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2\rangle \le R\|p_1 - p_2\|^2\ \ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N^P(a_i, A) : \|p_i| = 1$, $i = 1, 2$*;*

9) для любого $a \in \partial A$ *множество* A *локально* R*-сильно выпукло в точке* a*;*

10) локальный опорный принцип: $\forall a \in \partial A\ \exists \varepsilon \in (0, R)\ \ \exists p \in \partial B_1(0) : A \cap B_\varepsilon(a) \subset B_R(a - Rp)$*;*

11) $\operatorname{diam} A \le 2R$ *и* $\delta_A(\varepsilon) \ge R - \sqrt{R^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \quad \forall \varepsilon \in (0, \operatorname{diam} A)$*;*

12) $\|a_1 - a_2\| \le \frac{R\sqrt{\|x_1 - x_2\|^2 - (d_A(x_1) - d_A(x_2))^2}}{\sqrt{(R + d_A(x_1))(R + d_A(x_2))}}\ \forall x_i \in H,\ a_i \in P_A(x_i),\ i = 1, 2.$

Исследованию сильно выпуклых множеств посвящены работы [10–13]. На основе свойств метрической проекции на сильно выпуклое множество в работе [13] получены эффективные оценки сходимости для метода проекции градиента в задаче оптимизации выпуклой функции на сильно выпуклом множестве.

Определение 4. Множество $A \subset H$ называется R-слабо выпуклым, если для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$ найдется точка $z \in D_R(x, y) \cap A$, отличная от x, y.

Кривой в H называется непрерывная функция $\Gamma : [0, 1] \to H$. Будем говорить, что кривая Γ *соединяет точки* $\Gamma(0)$ and $\Gamma(1)$. *Носителем* кривой Γ называется множество $\Gamma([0, 1]) = \{\Gamma(t) :\ t \in [0, 1]\}$. *Длина* кривой

Γ определяется формулой $|\Gamma| = \sup \sum_{i=1}^{I} \|\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})\|$, где супремум берется по всем разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = 1$ отрезка $[0,1]$. Для множества $A \subset H$ и точек $x, y \in A$ кривая $\Gamma : [0,1] \to A$ такая, что $\Gamma(0) = x$, $\Gamma(1) = y$ называется *кратчайшей*, соединяющей x и y, если длина кривой Γ минимальна среди всех таких кривых.

Теорема 2. *Для замкнутого множества $A \subset H$ и числа $R > 0$ следующие условия эквивалентны:*

1) *A является R-слабо выпуклым;*

2) *$A \cap \operatorname{int} B_R(a + Rp) = \emptyset \quad \forall a \in \partial A\ \forall p \in N^P(a, A) : \ \|p\| = 1$;*

3) *$\langle p_1, a_1 - a_2 \rangle \geq -\frac{1}{2R}\|a_1 - a_2\|^2 \quad \forall a_1, a_2 \in A\ \forall p_1 \in N^P(a_1, A) : \ \|p_1\| = 1$;*

4) *$\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2 \rangle \geq -\frac{1}{R}\|a_1 - a_2\|^2 \quad \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N^P(a_i, A) : \|p_i\| \leq 1$, $i = 1, 2$;*

5) *если $x \in U_A(R)$ и последовательность $\{a_k\} \subset A$ удовлетворяет условию $\|x - a_k\| \to d_A(x)$, то $\{a_k\}$ сходится;*

6) *оператор метрической проекции $x \mapsto P_A(x)$ однозначен и непрерывен в окрестности $U_A(R)$;*

7) *функция расстояния $d_A(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_A(R) \setminus A$;*

8) *функция расстояния $d_A(\cdot)$ дифференцируема по Фреше на множестве $U_A(R) \setminus A$;*

9) *$\|a_1 - a_2\| \leq \frac{R}{R - \max\{d_A(x_1), d_A(x_2)\}}\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_i \in U_A(R)\ \forall a_i \in P_A(x_i)$, $i = 1, 2$;*

10) *$\gamma_A(\varepsilon) \leq R - \sqrt{R^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \quad \forall \varepsilon \in (0, R)$;*

11) *для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$ существует единственная кратчайшая кривая $\Gamma : [0,1] \to A$, соединяющая точки x и y, причем $\Gamma([0,1]) \subset D_R(x, y)$;*

12) *для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$ существует $\Gamma : [0,1] \to A$, соединяющая точки x и y и такая, что $|\Gamma| \leq 2R \arcsin\left(\frac{\|x-y\|}{2R}\right)$.*

В монографии [14] исследованы свойства слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве, а в работе [15] — в банаховом пространстве. Работы [16, 17] посвящены исследованию свойств метрической проекции на слабо выпуклые множества. На основе этих свойств в работе [17] получены оценки сходимости для метода проекции градиента в задаче оптимизации сильно выпуклой функции на слабо выпуклом (проксимально гладком) множестве. Работы [18, 19] посвящены исследованию свойств слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой.

Определение 5. Множество $A \subset H$ называется *локально R-слабо выпуклым* в точке $a \in \partial A$, если существует $\delta > 0$ такое, что множество $A \cap B_\delta(a)$ является R-слабо выпуклым.

Теорема 3. *Пусть множество $A \subset H$ замкнуто, связно и локально R-слабо выпукло в каждой точке $a \in \partial A$, причем* $\operatorname{diam} A < 2R$. *Тогда множество A является R-слабо выпуклым.*

Заметим, что условие $\operatorname{diam} A < 2R$ *существенно в теореме 3. Например, дуга $A = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \ \varphi \in [0, 2\pi - \delta]\}$, $\delta \in (0, \pi)$ в каждой точке $a \in \partial A$ является локально R-слабо выпуклым множеством при* $R = 1$, *но не является R-слабо выпуклым множеством.*

Определение 6. *Радиусом кривизны* множества $A \subset H$ в точке $a \in \partial A$ в направлении $p \in N^P(x, A) \cap \partial B_1(0)$ называется

$$\mathfrak{R}_A(a,p) = \liminf_{\substack{(x,v)\to(a,p) \\ x\in\partial A,\ v\in N^P(x,A)\cap\partial B_1(0)}} \sup\left\{r > 0 : A \cap \operatorname{int}\, B_r\left(x + rv\right) = \emptyset\right\}.$$

Теорема 4. *Замкнутое множество $A \subset H$ является R-слабо выпуклым тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{R}_A(a,p) \geq R \qquad \forall a \in \partial A \qquad \forall p \in N^P(a, A) \cap \partial B_1(0).$$

Будем говорить, что множества $A, C \subset H$ *отделимы сферой радиуса* $\rho > 0$, если существует точка $x \in H$ такая, что $A \cap \operatorname{int} B_\rho(x) = \emptyset$ и $C \subset B_\rho(x)$.

Рассмотрим *задачу поиска ближайших точек* для множеств $A, C \subset H$, состоящую в отыскании точек $a \in A$ и $c \in C$ таких, что $\|a - c\| = \varrho(A, C) := \inf\limits_{x\in A,\ y\in C} \|x - y\|$. Эта задача называется *корректной по Тихонову*, если любые последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{c_k\} \subset C$ такие, что $\|a_k - c_k\| \to \varrho(A, C)$, сходятся.

Теорема 5. *Пусть множество $C \subset H$ является r-сильно выпуклым,* $\operatorname{int}\, C \neq \emptyset$, *а множество $A \subset H$ замкнуто и R-слабо замкнуто, причем $R > r$ и $A \cap \operatorname{int} C = \emptyset$. Тогда*

1) множества A и C можно отделить сферой любого радиуса $\rho \in [r, R]$;

2) если дополнительно $\varrho(A, C) < R - r$, то задача поиска ближайших точек для множеств A и C корректна по Тихонову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Решетняк Ю. Г.* Об одном обобщении выпуклых поверхностей // Матем. сб. 1956. Т. 40. С. 381–398.

2. *Стечкин С. Б., Ефимов Н. В.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.

3. *Michael E.* Paraconvex sets // Math. Scand. 1959. Vol. 7. P. 372–376.

4. *Federer H.* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 93. P. 418–491.

5. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. 1983. Vol. 8. P. 231–259.

6. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal smoothness and lower–C^2 propoerty // J. Convex Anal. 1995. Vol. 2. P. 117–144.

7. *Poliquin R. A., Rockafellar R. T.* Prox-regular functions in variational analysis // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348. P. 1805–1838.

8. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. 2006. Vol. 13. P. 525–559.

9. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces: various regularity and other properties // Trans. Amer. Math. Soc. 2011. Vol. 363. P. 2211–2247.

10. *Половинкин Е. С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187, № 2. С. 103–130.

11. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с.

12. *Goncharov V. V., Ivanov G. E.* Strong and Weak Convexity of Closed Sets in a Hilbert Space // In: Operations research, engineering, and cyber security. Vol. 113 of the series Springer optimization and its applications. P. 259–297.

13. *Balashov M. V., Golubev M. O.* About the Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 394. P. 545–551.

14. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения М. : Физматлит, 2006. 352 с.

15. *Ivanov G. E.* Weak convexity of sets and functions in a Banach space // J. Convex Anal. 2015. Vol. 22. P. 365–398.

16. *Balashov M. V.* Proximal smoothness of a set with the Lipschitz metric projection // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 406. P. 360–363.

17. *Balashov M. V.* About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set // J. Convex Anal. 2017. Vol. 24. P. 493–500.

18. *Ivanov G. E., Lopushanski M.S.* Well-posedness of approximation and optimization problems for weakly convex sets and functions // J. Math. Sciences 2015. Vol. 209. P. 66–87.

19. *Ivanov G. E., Lopushanski M.S.* Separation theorems for nonconvex sets in spaces with non-symmetric seminorm // Math. Ineq. and Appl. 2017. Vol. 20, № 3. P. 737–754.