получаем следующее приближенное равенство:

$$\sigma(x) \approx u(x, \varphi(x, \lambda_1), ..., \varphi(x, \lambda_n)),$$

где

$$u(x, y_1, y_2, ..., y_n) := F(x) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}(x, \lambda_k) \left(y_k - \tilde{\varphi}(x, \lambda_k)\right) \hat{M}(\lambda_k).$$

Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, чтобы трактовать процесс восстановления потенциала как решение следующей задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1^{[1]}(x) + u(x, y_1, ..., y_n) y_1(x), \\ ... \\ y_n'(x) = y_n^{[1]}(x) + u(x, y_1, ..., y_n) y_n(x), \\ (y_1^{[1]}(x))' = -u(x, y_1, ..., y_n) y_1^{[1]}(x) - (u^2(x, y_1, ..., y_n) + \lambda_1) y_1(x), \\ ... \\ (y_n^{[1]}(x))' = -u(x, y_1, ..., y_n) y_n^{[1]}(x) - (u^2(x, y_1, ..., y_n) + \lambda_n) y_n(x), \\ y_k(0) = 1, \quad k = \overline{1, n}, \\ y_k^{[1]}(0) = \tilde{h}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Для решения данной задачи Коши могут использоваться классические численные методы (Адамса, Гира и т.д.). Окончательно в качестве приближенного решения обратной задачи принимается функция $u(x, y_1(x), ..., y_n(x))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

УДК 517.54

О СООТНОШЕНИИ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ ДВУХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ[1]

А. В. Жердев (Саратов, Петрозаводск, Россия)
jerdevandrey@gmail.com

Обозначим $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$, $F : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ — конформные отображения, где Ω —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

область, ограниченная замкнутой жордановой кривой Γ, Ω^* — неограниченная компонента дополнения Γ. Пусть $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, а F имеет следующее разложение в ряд Лорана в окрестности точки ∞: $F(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + ...$, $b_1 > 0$. Тогда $f'(0) = r(\Omega, 0)$ называется конформным радиусом области Ω в точке 0, а $b_1^{-1} = r(\Omega^*, \infty)$ — конформным радиусом области Ω^* в точке ∞. Справедливо неравенство, полученное методом площадей Н. А. Лебедевым как частный случай более общей теоремы для неналегающих областей [1]:

$$r(\Omega, 0) r(\Omega^*, \infty) \leq 1,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда Γ — окружность с центром в начале координат.

Другим подходом к рассмотрению задачи о соотношении конформных радиусов двух неналегающих областей может служить параметрический метод, разработанный в работах К. Левнера [2], П. П. Куфарева [3], К. Поммеренке [4]. Будем называть однопараметрическое семейство областей $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$, убывающим, если $\Omega(t_2) \subset \Omega(t_1)$, $0 \leq t_1 < t_2 < T$; возрастающим — если $\Omega(t_1) \subset \Omega(t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 < T$; монотонным — если оно убывающее или возрастающее. Пусть $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$ — монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, функция $f(z,t) = a(t)z + ...$ — при каждом t конформно отображает единичный круг на $\Omega(t)$, где $a(t)$ — положительная непрерывная функция. Тогда [3, 5] $f(z,t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} q(z,t), \quad 0 \leq t < T, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $q(z,t)$ — голоморфная в $\mathbb{D}$ функция при каждом фиксированном t. Заметим, что если $\Omega(t)$ — возрастающее семейство областей и переменная t выбрана таким образом, что $a(t) = e^t$, то $q(z,t)$ принадлежит классу Каратеодори (приведенное уравнение в этом случае обычно называют уравнением Левнера–Куфарева). Следующая теорема дает интегральное представление функции $q(z,t)$ для семейств областей $\Omega(t)$ ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах.

Теорема 1. *Пусть $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$, — монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $0 \leq t < T$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, ограниченных кривыми $\Gamma(t)$, заданными в полярных координатах (r, ψ) уравнением $r = \gamma(\psi, t) = 1 + \delta(\psi, t)$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq t < T$, где $\delta \in C^{3+\alpha}([0, 2\pi] \times [0, T))$, $0 < \alpha < 1$. Функция $f(z,t) = a(t)z + ...$, $a(t) > 0$, — конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на $\Omega(t)$. Тогда $\dot{f}(z,t)$ существует для всех $0 \leq t < T$, $z \in \mathbb{D}$ и $f(z,t)$ удовлетворяет*

уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} q(z,t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \le t < T,$$

причем

$$q(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi},t)|}\dot{\delta}(\psi(\varphi,t),t)\cos(\beta(\psi(\varphi,t),t))\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi,$$

$$z \in \mathbb{D}, \quad 0 \le t < T,$$

где $\psi(\varphi,t) = \arg f(e^{i\varphi},t)$, $\beta(\psi,t) = -\arctan(\frac{\gamma'(\psi,t)}{\gamma(\psi,t)})$ *— угол между нормалью к* $\Gamma(t)$ *в точке* $\gamma(\psi,t)$ *и радиальным вектором, проходящим через эту точку.*

Вместе с семейством областей $\Omega(t)$, будем рассматривать семейство областей $G(t)$, границы которых заданы в полярных координатах уравнением $r = \gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. Следующая теорема дает асимптотическую формулу, связывающую конформные радиусы этих семейств в точке 0.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega(t)$, $0 \le t < T$, *— монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей,* $0 \in \Omega(t)$, $0 \le t < T$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, *ограниченных кривыми* $\Gamma(t)$, *заданными в полярных координатах* (r,ψ) *уравнением* $r = \gamma(\psi,t) = 1 + \delta(\psi,t)$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $0 \le t < T$, *где* $\delta \in C^{3+\alpha}([0,2\pi]\times[0,T))$, $0 < \alpha < 1$. *При этом, пусть конформный радиус* $r(\Omega(t),0) = e^t$, *если* $\Omega(t)$ *— возрастающее семейство областей и* $r(\Omega(t),0) = e^{-t}$, *если* $\Omega(t)$ *— убывающее семейство областей. Пусть* $G(t)$ *— семейство областей, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах уравнением* $r = \gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. *Тогда справедлива формула*

$$\log r(G(t),0) = ct + \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\dot{\delta}(\varphi,0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi,0)\,d\varphi\right)t^2 + o(t^2), \quad t \to +0,$$

где $r(G(t),0)$ *— конформный радиус области* $G(t)$, $c = 1$, *если* $\Omega(t)$ *— убывающее семейство,* $c = -1$, *если* $\Omega(t)$ *— возрастающее семейство.*

Доказательство теоремы 2 основано на результате предыдущей теоремы и соотношении $\gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. Несложно показать, что $r(\Omega^*(t),\infty) = r(G(t),0)$, $0 \le t < T$, где $\Omega^*(t)$ — неограниченная компонента дополнения $\Gamma(t)$. Таким образом теорема 2 дает асимптотическую формулу, связывающую конформные радиусы семейств областей $\Omega(t)$ и $\Omega^*(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М. : Наука, 1975. 336 с.

2. *Lowner K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd. 89, S. 103–121.

3. *Куфарев П. П.* Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. 1996. Т. 13(55), вып. 1. С. 87-118.

4. *Pommerenke Ch.* Uber die Subordination analytischer Funktionen // J. Reine Angew. Math. 1965. Bd. 218, S. 159—173.

5. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Gottingen : Vandenhoeck and Ruprecht. 1975.

УДК 517.9

ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛЬНО И СЛАБО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Г. Е. Иванов (Долгопрудный, Россия)

g.e.ivanov@mail.ru

Различные классы множеств, обладающих усиленными или ослабленными свойствами выпуклости, рассматривались многими авторами в связи с приложениями в оптимизации, оптимальном управлении, теории и методах решения уравнения Гамильтона – Якоби, многозначном анализе, теории аппроксимаций и других разделах математики. Впервые понятие слабой выпуклости появилось в работе Ю. Г. Решетняка [1]. Затем Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [2] рассматривали a-выпуклые множества, представимые в виде пересечения дополнений к шарам фиксированного радиуса. Е. Майкл [3] ввел понятие паравыпуклых множеств и доказал теорему о существовании непрерывного селектора для многозначного отображения с паравыпуклыми значениями. Г. Федерер [4] ввел понятие множества положительной достижимости, как множества A, для которого точки из некоторой окрестности A обладают чебышевским свойством, т.е. имеют единственную ближайшую точку из множества A. Ж.-Ф. Виаль [5] рассматривал слабо выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, т.е. такие, что для любых двух достаточно близких точек этого множества, сильно выпуклый отрезок с концами в этих точках имеет еще хотя бы одну общую точку с множеством. Ф. Кларк, Р. Штерн и П. Воленски [6] ввели понятие проксимально гладкого множества, т.е. множества, для которого функция расстояния непрерывно дифференцируема в окрестности этого множества. В работах Р. Поликвина и Р.-Т. Рокафеллара [7], а затем в работах Ф. Бернарда, Л. Тибо и Н. Златевой [8, 9] рассматрились прокс-регулярные множества, т.е. множества, допускающих касание сферой в граничных точках.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00259-а).