УДК 517.9

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ОБОБЩЕННО МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. И. Дьяченко (Москва, Россия),
А. Б. Муканов (Астана, Казахстан),
С. Ю. Тихонов (Барселона, Испания)
mukanov.askhat@gmail.com

В этой работе мы рассматриваем синус ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{1}$$

с обобщенно монотонными коэффициентами $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В работе [1] Т. В. Чоунди и А. Е. Джоллиффе доказали следующую теорему о равномерной сходимости тригонометрических синус рядов.

Теорема А. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неотрицательная, невозрастающая последовательность. Тогда ряд (1) сходится равномерно на $[0, 2\pi]$ тогда и только тогда, когда $na_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Недавно различные обобщения этой теоремы были доказаны для различных ослаблений условия монотонности (см., например [2–5] и их библиографии). Многие обобщения включают рассмотрение обобщенно монотонных последовательностей. Напомним определение $GM(\beta)$ последовательностей (см. [3]).

Определение 1. Пусть $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности комплексных и неотрицательных чисел соответственно. Пара (a, β) определяет обобщенно монотонную последовательность **a** с мажорантой β, обозначается $a \in GM(\beta)$, если существует $C > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \le C\beta_n. \tag{2}$$

Приведем примеры некоторых мажорант β, используемых в изучении тригонометрических рядов:

1) $\beta_n^1 = |a_n|$;

2) $\beta_n^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{s=n/\lambda}^{\lambda n} |a_s|$, $\lambda > 1$;

3) $\beta_n^3 = \frac{1}{n}\max\limits_{k\ge n}\sum\limits_{s=k}^{2k}|a_s|$, $\lambda>1$.

Известно, что $GM(\beta^1)\subset GM(\beta^2)\subset GM(\beta^3)$ (см. [5, 6].) Более того, если $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM(\beta^i)$, $i=1,2,3$, и $a_n\ge 0$, тогда ряд (1) сходится равномерно на $[0,2\pi]$ тогда и только тогда, когда $na_n\to 0$ при $n\to\infty$ (см. [3–6]. Недавно в статье [7] авторы доказали аналог теоремы A для $\{a_n\}\in GM(\beta^2)$ без условия неотрицательности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Мы, следуя идеям из [7], изучаем равномерную сходимость синус рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами, которые не обязательно являются неотрицательными. При этом мы рассматриваем последовательности $GM(\beta)$ для некоторого класса мажорант β. Приведем определения некоторых понятий.

Пусть S — множество числовых последовательностей.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность функционалов, заданных на S, т.е., $F_n : S\to\mathbb{R}_+$, *допустима* если:

1) $F_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ для любой последовательности $x=\{x_k\}_{k=1}^\infty$ стремящейся к нулю;

2) последовательность $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ограничена для ограниченной $x=\{x_k\}_{k=1}^\infty$.

Примеры таких $F=\{F_n\}_{n=1}^\infty$:

1) $F_n^1(x)=|x_n|^\alpha$, $\alpha>0$;

2) $F_n^2(x)=\sum\limits_{k=n/\lambda}^{\lambda n}\frac{|x_k|}{k}$, $\lambda>1$;

3) $F_n^3(x)=\max\limits_{k\ge n/\lambda}|x_k|$, $\lambda>1$;

4) $F_n^4(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$.

Для заданной последовательности $a=\{a_n\}_{n=1}^\infty$, обозначим через $\widetilde{a}$ следующую последовательность: $\widetilde{a}_n=\sum\limits_{k=n}^{2n}|a_k|$. Мы рассматриваем класс обобщенно монотонных последовательностей $GM(\beta)$ с

$$\beta_n=\frac{1}{n}F_n(\widetilde{a}).$$

В частности, класс $GM(\beta^3)$ это класс $GM(\beta)$ с $\beta_n=\frac{1}{n}F_n^3(\widetilde{a})$. Более того, $GM(\beta^2)$ совпадает с $GM(\beta)$, где $\beta_n=\frac{1}{n}F_n^2(\widetilde{a})$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательность функционалов $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ допустима. Пусть также $\{a_n\}_{n=1}^\infty\in GM(\beta)$, где $\beta_n=\frac{1}{n}F_n(\widetilde{a})$ и $\widetilde{a}$ – огра-*

ниченная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *ряд (1) сходится равномерно на* $[0, 2\pi]$*;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$;

3 $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = 0$.

Замечание 1. Вообще говоря, утверждение теоремы 1 неверно без допущения условия ограниченности последовательности $\{\widetilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 2. Мы показали, что существует последовательность $a \in \in GM(\beta^3) \setminus GM(\beta^2)$ такая, что $\widetilde{a}$ неограничена. Это показывает, что теорема 1 обобщает результат из [7].

Также мы получили необходимые и достаточные условия равномерной сходимости косинус рядов с незнакопостоянными обобщенно монотонными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chaundy T. W., Jolliffe A. E.*, The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series // Proc. London Math. Soc. 1916. Vol. 2, № 15. P. 214–216.
2. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. 2001. Iss. 27. P. 279–285.
3. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Iss. 326. P. 721–735.
4. *Zhou S. P., Zhou P., Yu D. S.* Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series // Sci. China, Math. 2010. Iss. 53. P. 1853–1862.
5. *Dyachenko M., Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. 2009. Vol. 193, № 3. P. 285–306.
6. *Tikhonov S.* Best approximation and moduli smoothness: computation and equivalence theorems // J. Approx. Theory. 2008. Iss. 153. P. 19–39.
7. *Feng L., Totik V., Zhou S. P.* Trigonometric series with a generalized monotonicity condition // Acta Math. Sinica, English Ser. 2014. Vol. 30, № 8. P. 1289–1296.

УДК 517.984

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ[1]

Л. С. Ефремова (Саратов, Россия)

liubov.efremova@gmail.com

Данная работа посвящена построению эффективного численного алгоритма решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке.

Рассмотрим уравнение:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты № 15-01-04864, 16-01-00015, 17-51-53180).