5. *Дудов С. И.* Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 64–75.

6. *Дудов С. И., Мещерякова Е. А.* Об асферичности выпуклого тела // Изв. вузов. Сер. Матем. 2015. № 2. С. 45–58.

УДК 517.52

ТЕОРЕМА ХАРДИ – ЛИТТЛЬВУДА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ОБОБЩЕННО-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

М. И. Дьяченко (Москва, Россия),
А. Муканов (Астана, Казахстан),
С. Ю. Тихонов (Барселона, Испания)
dyach@mail.ru

Хорошо известен следующий результат Г. Харди – Дж. Литтльвуда [1].

Теорема А. *Пусть $f(x)$ есть сумма ряда*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

коэффициенты которого $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремятся к нулю. Тогда для любого $1<p<\infty$ имеем

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)}\asymp\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}(a_n^p+b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Результаты такого типа весьма важны и неудивительно, что теорема А обобщалась в различных направлениях многими авторами. В частности, можно упомянуть работы [2–7]. Отметим еще, что первый аналог теоремы А для пространств Лоренца был установлен в работе [2].

Напомним определение весовых пространств Лебега и пространств Лоренца. Пусть μ — мера Лебега на $[0,2\pi]$, f — μ-измеримая функция на $[0,2\pi]$. Тогда обозначим через f^* невозрастающую перестановку f, т.е.

$$f^*(t)=\inf\{\sigma:\ \mu\{x\in[0,2\pi]:\ |f(x)|>\sigma\}\le t\}.$$

Определение 1. Пусть $0<p\le\infty$ и $0<q\le\infty$. Тогда *пространство Лоренца* $L_{p,q}([0,2\pi])$ — это множество всех μ-измеримых функций,

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ ((проект N 18-01-00281).

для которых величина

$$\|f\|_{L_{p,q}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0 < p < \infty \text{ и } 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{t \in [0,2\pi]} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{при } 0 < p \le \infty \text{ и } q = \infty \end{cases}$$

конечна.

Определение 2. Пусть $0 < p \le \infty$ и $0 < q \le \infty$. Тогда *весовым пространством Лебега* $L^q_{w(p,q)}([0, 2\pi])$ называется множество μ-измеримых функций f, для которых величина

$$\|f\|_{L^q_{w(p,q)}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0 < p < \infty \text{ и } 0 < q < \infty, \\ ess\ sup\limits_{t \in [0,2\pi]} t^{\frac{1}{p}} |f(t)| & \text{при } 0 < p \le \infty \text{ при } q = \infty, \end{cases}$$

конечна. Здесь через $w(p,q)(t)$ обозначается весовая функция $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

Будем также обозначать через $l_{p,q}$ и $l^q_{w(p,q)}$ аналогичным образом определенные пространства Лоренца и весовые пространства Лебега последовательностей, соответственно.

Замечание . Отметим, что $\|f\|_{L_{p,p}} = \|f\|_{L^p_{w(p,p)}} = \|f\|_{L_p}$. Более того,

$$\|f\|_{L_{p,q}} \ge \|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \quad \text{при} \quad q \le p$$

и

$$\|f\|_{L_{p,q}} \le \|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \quad \text{при} \quad q \ge p\,.$$

Введем класс обобщенно-монотонных последовательностей.

Определение 3. Назовем последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *обобщенно-монотонной* ($\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM$), если существуют постоянные $C > 0$ и $\lambda > 1$ такие, что при любом $n \ge 1$ имеем

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \le C \sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n} \frac{|a_k|}{k}.$$

Нами установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда*

$$\|f\|_{L_{p,q}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l_{p'q}} + \|\mathbf{b}\|_{l_{p',q}}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le q \le \infty.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда*

$$\|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l^q_{w(p',q)}} + \|\mathbf{b}\|_{l^q_{w(p',q)}}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le q \le \infty.$$

Здесь через p' *обозначено число, сопряженное к* p, *т.е.,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Справедлив, также, и нижеследующий результат.

Следствие 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда при* $1 < p < \infty$ *и* $1 \le q \le \infty$ *имеем*

$$\|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \asymp \|f\|_{L_{p,q}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l^q_{w(p',q)}} + \|\mathbf{b}\|_{l^q_{w(p',q)}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l_{p',q}} + \|\mathbf{b}\|_{l_{p',q}}.$$

Отметим, что теорема 1 была ранее доказана в работе [8] для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in GM$ такова, что для всех $n \ge 0$ числа $c_n \in S_{\alpha,\beta}$, где

$$S_{\alpha,\beta} = \{re^{i\varphi} : |\varphi - \alpha| \le \beta, r \ge 0\}, \quad 0 \le \alpha < 2\pi, \quad 0 \le \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Ясно, что при $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ множество $S_{0,\beta}$ содержит положительную полуось $\mathbf{R}_+$, но при любых $0 \le \alpha < 2\pi$ и $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ множество $S_{\alpha,\beta}$ не покрывает всю действительную прямую $\mathbf{R}$.

Теорема 2 также была ранее доказана для неотрицательных последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ в работах [5] и [4].

Метод, разработанный при доказательстве теорем 1 и 2 позволяет установить и теоремы о взаимосвязи модуля гладкости функции со скоростью убывания ее коэффициентов Фурье, когда эти коэффициенты обобщенно-монотонны.

Для интегрируемой функции f с тригонометрическим рядом Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

в статье [9] Г. Лоренц показал, что если при $2 \leq p \leq \infty$ и $0 < \alpha < 1$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^{p'} + |b_k|^{p'}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha p'}}\right),$$

то $f \in Lip\ (\alpha, p)$. Здесь через $Lip\ (\alpha, p)$ обозначено пространство Липшица:

$$Lip\ (\alpha, p) := \{f \in L_p([0, 2\pi]) : \omega(f, \delta)_p = O(\delta^{\alpha})\},$$

где $\omega(f,\delta)_p := \sup\limits_{|h|\leq\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p$ – модуль гладкости первого порядка в L_p функции f.

Этот результат обобщался многими математиками. Упомянем здесь работы [10–14].

Обозначим через

$$\omega_l(f,\delta)_p := \sup_{|h|\leq\delta}\left\|\Delta_h^l f(\cdot)\right\|_p,$$

модуль гладкости l-го порядка ($l \geq 1$) в L_p функции f, где

$$\Delta_h^l f(x) := \Delta_h(\Delta_h^l f(x)), \quad \Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x).$$

Сформулируем результат А. А. Конюшкова [12].

Теорема Б. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, *и функция* $f(x)$ *обладает рядом Фурье (1), причем* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— невозрастающие последовательности. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $f \in Lip\ (\alpha, p)$;

2) $|a_n|, |b_n| = O\left(n^{\frac{1}{p}-\alpha-1}\right)$;

3) $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(|a_k|^{p'} + |b_k|^{p'}) = O\left(n^{-\alpha p'}\right)$.

Нами в этом направлении получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in L_p([0,2\pi])$, $1 < p < \infty$ функция*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. Тогда для $l \in \mathbf{N}$ имеем

$$\omega_l\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \sim \frac{1}{n^l}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{lp+p-2}\left(|a_k|^p + |b_k|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{p-2}\left(|a_k|^p + |b_k|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants // J. Lond. Math. Soc. 1931. Vol. 1–6, № 1. P. 3–9.

2. *Sagher Y.* An application of interpolation theory to Fourier series // Stud. Math. 1972. Vol. 41. P. 169–181.

3. *Tikhonov S.Yu.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 1. P. 721–735.

4. *Dyachenko M., Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. 2009. Vol. 193, № 3. P. 285–306.

5. *Yu D.S., Zhou P., Zhou S.P.* On L^p integrability and convergence of trigonometric series // Stud. Math. 2007. Vol. 182, № 3. P. 215–226.

6. *Dyachenko M.I.* The Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with generalized monotone coefficients // Russ Math. 2008. Vol. 52, № 5. P. 32–40.

7. *Dyachenko M., Nursultanov E., Kankenova A.* On summability of Fourier coefficients of functions from Lebesgue space // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 419, № 2. P. 959–971.

8. *Grigoriev S., Sagher Y., Savage T.* General monotonicity and interpolation of operators // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 435, № 2. P. 1296–1320.

9. *Lorentz G.G.* Fourier-koeffizienten und funktionenklassen // Math. Z. 1948. Vol. 51. P. 135–149.

10. *Тиман А. Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. С. 17–20.

11. *Gorbachev D., Tikhonov S.* Moduli of smoothness and growth properties of Fourier transforms: two-sided estimates // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164. P. 1283–1312.

12. *Конюшков А.А.* О классах Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, № 3. С. 423–448.

13. *Aljančić S.* On the integral moduli of continuity in $L_p, (1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficents // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, № 2. P. 287–294.

14. *Askey R.* Smoothness conditions for Fourier series with monotone coefficients // Acta Sci. Math. (Szeged). 1967. Vol. 28. P. 169–171.