Считаем далее, что $M = \{y \in R^p : \langle A_i, y\rangle + b_i \le 0, i = \overline{1,m}\} \ne \emptyset$. Обозначим через

$$\Omega_i = \{y \in R^p : \langle A_i, y\rangle + b_i \ge 0\},\ \varphi_i(x) = \min_{y\in\Omega_i} f(y-x),$$

$$Q_i(x) = \{z \in \Omega_i : \varphi_i(x) = f(z-x)\}, \quad I(x) = \{i \in [1:m] : \varphi(x) = \varphi_i(x)\},$$
$$K(A) = \{v = \alpha A : \alpha \ge 0\},\ \varphi'(x,g) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \alpha^{-1}(\varphi(x+\alpha g) - \varphi(x)).$$

Теорема 2. *Если множество Ω задано в форме* (3), *то функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема по любому направлению $g \in R^p$ в любой точке $x \in R^p$, причем*

$$\varphi'(x,g) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin M, \\ \min\limits_{i\in I(x)} \max\limits_{v\in\partial\varphi_i(x)} \langle v, g\rangle, & \text{если } x \in M, \end{cases} \tag{4}$$

где $\partial\varphi_i(x) = -\{\partial f(z-x) \cap K(A_i)\}$, z — любая точка из $Q_i(x)$.

Замечание. Множество $\{\partial\varphi_i(x) : i \in I(x)\}$, как следует из формулы (4), является верхним экзостером функции $\varphi(x)$ в точке $x \in M$ (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.

2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука. 1980. 320 с.

3. *Демьянов В. Ф., Рощина В. А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказ. матем. журн. 2006. Т. 8, № 4. С. 19–31.

УДК 517.9

О ДВУМЕРНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЬЮТОНА – ПАДЕ

Дж. Акал (Стамбул, Турция),
А. Л. Лукашов (Москва, Россия)
alexey.lukashov@gmail.com

Основная цель данной работы — предложить подход к построению двумерных многоточечных аппроксимаций Ньютона – Паде, позволяющий использовать его в символьных вычислениях.

В одномерном случае этот подход (хотя и без явного указания его возможностей для символьных вычислений) был предложен в [1]. Одной из основ этого подхода является следующая несложно доказываемая

лемма, позволяющая пересчитывать в явном виде по нулям многочлена коэффициенты его разложения по базису Ньютона (обычно это делается рекуррентно с помощью конечных разностей, что трудно реализуемо в символьных вычислениях из-за необходимости учитывать случаи совпадающих узлов).

Лемма 1. *Пусть* $\{\beta_k\}$ *— комплексные числа (не обязательно различные). Если*

$$B_k(z) = \prod_{j=0}^{k-1} (z - \beta_j), \quad k = 1, 2, 3, \cdots; \quad B_0(z) = 1$$

и

$$P_n(z) = (z - \beta_1')(z - \beta_2') \ldots (z - \beta_n'),$$

то

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} B_k(z),$$

где

$$\begin{aligned} c_{k,n} &= \sum_{i_1=1}^{k+1} \sum_{i_2=i_1}^{k+1} \cdots \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k+1} \prod_{j=1}^{n-k} \left(\beta_{i_j} - \beta'_{i_j+j-1}\right), \\ k &= 1, 2, \ldots, n-1, \quad c_{n,n} = 1. \end{aligned}$$

Для функций двух переменных введем обозначение

$$B_{kl}(x, y) = \prod_{r=0}^{k-1} (x - x_r) \prod_{s=0}^{l-1} (y - y_s).$$

Тогда справедлива

Лемма 1.

$$B_{kl}(x, y) B_{ij}(x, y) = \sum_{r=\max(k,i)}^{k+i} \sum_{s=\max(l,j)}^{l+j} \Omega_{k,i}^{(1,r)} \Omega_{l,j}^{(2,s)} B_{rs}(x, y), \qquad (1)$$

где

$$\Omega_{k,i}^{(1,r)} = \sum_{j_1=\max(k,i)}^{r} \sum_{j_2=j_1}^{r} \cdots \sum_{j_{k+i-r}=j_{k+i-r-1}}^{r} \prod_{m=1}^{k+i-r} \left(x_{j_m} - x_{j_m+m-\max(k,i)-1}\right),$$
$$r < k + i,$$

$$\Omega_{k,i}^{(1,r)} = 1, \quad r = k + i$$

и

$$\Omega_{l,j}^{(2,s)} = \sum_{j_1=\max(l,j)}^{s} \sum_{j_2=j_1}^{s} \cdots \sum_{j_{l+j-s}=j_{l+j-s-1}}^{s} \prod_{m=1}^{l+j-s} \left(y_{j_m} - y_{j_m+m-\max(l,j)-1}\right),$$
$$s < l + j,$$

$$\Omega_{l,j}^{(2,s)} = 1, \quad s = l + j.$$

Далее мы будем использовать конструкцию из работы [2]. Предположим, что задан формальный двойной ряд Ньютона

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} c_{ij} B_{ij}(x,y)$$

и три множества N, D, E пар натуральных чисел. Тогда $[N/D]_E$ аппроксимация Ньютона – Паде ряда $f(x,y)$ определяется как пара многочленов

$$p(x,y) = \sum_{(i,j)\in N} a_{ij} B_{ij}(x,y), \tag{2}$$

$$q(x,y) = \sum_{(i,j)\in D} b_{ij} B_{ij}(x,y), \tag{3}$$

для которых соответствующие коэффициенты Ньютона у разности $(f \cdot q - p)$ равны нулю:

$$(f \cdot q - p)_{i,j} = 0 \ \text{ для } \ (i,j) \ \text{ из } \ E. \tag{4}$$

Основной результат — представление нетривиального решения (в случае, если оно существует):

$$q(x,y) = \begin{vmatrix} B_{i_0 j_0}(x,y) & \cdots & B_{i_m j_m}(x,y) \\ \beta_{k_1,i_0;l_1,j_0} & \cdots & \beta_{k_1,i_m;l_1,j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k_m,i_0;l_m,j_0} & \cdots & \beta_{k_m,i_m;l_m,j_m} \end{vmatrix},$$

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{(i,j)\in N} \beta_{i,i_0;j,j_0} B_{ij}(x,y) & \cdots & \sum\limits_{(i,j)\in N} \beta_{i,i_m;j,j_m} B_{ij}(x,y) \\ \beta_{k_1,i_0;l_1,j_0} & \cdots & \beta_{k_1,i_m;l_1,j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k_m,i_0;l_m,j_0} & \cdots & \beta_{k_m,i_m;l_m,j_m} \end{vmatrix},$$

где $\beta_{i,k;j,l} = \sum\limits_{r=i-k}^{i} \sum\limits_{s=j-l}^{j} c_{rs}\Omega_{k,r}^{(1,i)}\Omega_{l,s}^{(2,j)}$.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} B_{i,j}(x,y),$$

где $x_i = i\sqrt{\pi}$ для $i = 0, 1, ...$ и $y_j = (j-1)\sqrt{\pi}$ для $j = 0, 1, ...$

Далее положим

$D = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$,

$N = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$,

$E = \{(2,1), (1,2), (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$.

Тогда

$$q(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y+\sqrt{\pi} \\ c_{21} & c_{11}+2c_{21}\sqrt{\pi} & c_{20}+c_{21}\sqrt{\pi} \\ c_{12} & c_{02}+c_{12}\sqrt{\pi} & c_{11}+2c_{12}\sqrt{\pi} \end{vmatrix}$$

и

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} c_{10}x + c_{01}(y+\sqrt{\pi}) + & (c_{00}+c_{10}\sqrt{\pi})x + (c_{01}+ & (c_{00}+c_{01}\sqrt{\pi})(y+\sqrt{\pi}) + \\ +c_{00} + c_{11}x(y+\sqrt{\pi}) & +c_{11}\sqrt{\pi})x(y+\sqrt{\pi})) & +(c_{10}+c_{11}\sqrt{\pi})x(y+\sqrt{\pi}) \\ c_{21} & c_{11}+2c_{21}\sqrt{\pi} & c_{20}+c_{21}\sqrt{\pi} \\ c_{12} & c_{02}+c_{12}\sqrt{\pi} & c_{11}+2c_{12}\sqrt{\pi} \end{vmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukashov A., Akal C.* Determinant form and a test of convergence for Newton – Padé approximations // Journal of Computational Analysis and Applications. 2013. Vol. 15. P. 55–64.

2. *Cuyt A., Verdonk B.* General order Newton-Padé approximants for multivariate functions // Numerische Mathematik. 1984. Vol. 43. P. 293–307.

УДК 517.51

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА – КАРАМАТЫ[1]

Г. Акишев (Караганда, Казахстан)

akishev@ksu.kz

Рассмотрим множество $SV[1,\infty)$ слабо меняющихся функций на $[1,+\infty)$ (см. [1]). Множество всех положительных , измеримых по Лебегу

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.