2. *We find the following sharp constant in the Nikolskii inequality for nonnegative functions*

$$\sup_{f\in\mathcal{E}_1^d,\, f\geq 0} \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} = \frac{1}{2^{d-1}|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)}.$$

We estimate the normalized Nikolskii constant

$$L_d := \frac{|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)}{2}\,\mathcal{L}(d,1,\infty).$$

It was known that $e^{-d} \leq L_d \leq 1$.

3. *We prove the following lower and upper estimates:*

$$2^{-d} \leq L_d \leq {}_1F_2\Big(\frac{d}{2};\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}+1;-\frac{\beta_d^2}{4}\Big),$$

where ${}_1F_2$ *and* β_d *denote the hypergeometric function, and the smallest positive zero of the Bessel function* $J_{d/2}$*, respectively. In particular, this implies that the constant* L_d *decays exponentially fast as* $d\to\infty$*:*

$$2^{-d} \leq L_d \leq (\sqrt{2/e})^{d\left(1+O(d^{-2/3})\right)},$$

where $\sqrt{2/e} = 0.85776\cdots$.

УДК 517.53

О ЗАДАЧЕ ГОРИНА ДЛЯ ПОЛУОСИ[1]

В. И. Данченко, П. В. Чунаев (Владимир, Россия)
vdanch2012@yandex.ru, chunayev@mail.ru

Пусть все полюсы z_k *наипростейшей дроби*

$$\rho_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-z_k}$$

лежат в остром угле с биссектрисой на отрицательной полуоси $\mathbb{R}^-$:

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k}, \qquad \varphi_k \in (\pi-\alpha,\pi+\alpha), \qquad \alpha\in(0,\pi/2). \tag{1}$$

[1]Работа В. И. Данченко выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание № 1.574.2016/1.4). Работа П. В. Чунаева выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00252 мол_а.

В работе [1] с использованием новых параметрических квадратурных формул для рациональных функций получено следующее неравенство:

$$S^{2m-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\cos^{2m}\alpha}\frac{2m}{\pi}\|\rho_n\|^{2m}_{L_{2m}(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}, \qquad S := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Применим его для оценки величины

$$d(\rho_n) := \min_{k=1,\dots,n} \operatorname{dist}(z_k, \mathbb{R}^+)$$

при определенной нормировке L_p-нормы наипростейшей дроби ρ_n (это один из вариантов задачи Горина для полуоси). Заметим сначала, что при $2(m-1) < p \leqslant 2m$ имеем

$$\|\rho_n\|^{2m}_{L_{2m}(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})} = \int_{\mathbb{R}^+} |\rho_n(x)|^{2m-p}\frac{|\rho_n(x)|^p}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \|\rho_n\|^{2m-p}_{L_\infty(\mathbb{R}^+)}\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}.$$

Из (1), очевидно, следует, что $\|\rho_n\|^{2m-p}_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} \leqslant S^{2m-p}$. Отсюда и из (2) находим

$$S^{2m-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\cos^{2m}\alpha}\frac{2m}{\pi}S^{2m-p}\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}, \qquad 2(m-1) < p \leqslant 2m,$$

так что

$$S^{p-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\cos^{p+2}\alpha}\frac{p+2}{\pi}\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}, \qquad p > 0.$$

С учетом $S \leqslant d^{-1}(\rho_n)$ отсюда получается

Теорема. *При нормировке* $\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})} \leqslant 1$, $p > 1/2$, *справедливо неравенство*

$$d(\rho_n) \geqslant S^{-1} \geqslant \left(\frac{\pi\cos^{p+2}\alpha}{p+2}\right)^{1/(p-1/2)}\frac{1}{n^{1/(2p-1)}}.$$

В частности, если все $z_k \in \mathbb{R}^-$ (*т.е.* $\alpha = 0$), *то*

$$d(\rho_n) \geqslant \left(\frac{\pi}{p+2}\right)^{1/(p-1/2)}\frac{1}{n^{1/(2p-1)}} \geqslant \frac{4}{5n^{1/(2p-1)}}.$$

Эту теорему интересно сравнить со следующими результатами (без каких-либо условий на полюсы). При $1 < p < 2$ полюсы ρ_n, расположенные на полуоси $\mathbb{R}^-$ (если такие имеются), при нормировке $\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R}^+)} \leqslant 1$ отделены от нуля некоторой величиной $A(p) > 0$ (см. [2, Теорема 6]).

В [2] также высказана гипотеза, что при $p \geqslant 2$ такие полюсы могут сколь угодно близко подступать к нулю.

При нормировке $\|\rho_n\|_{L_2(\mathbb{R}^+)} \leqslant 1$ и достаточно больших n полюсы ρ_n отделены от всей полуоси $\mathbb{R}^+$ величиной порядка $1/\ln n$ (см. [3, Следствие 3.1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Chunaev and V. Danchenko.* Sharp inequalities of Jackson-Nikolskii type for rational functions // arXiv:1611.03485. 2016.

2. *Бородин П. А.* Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 803—810.

3. *Бородин П. А.* Приближение наипростейшими дробями на полуоси // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 8. С. 25–44.

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО МЕЖДУ РАВНОМЕРНОЙ НОРМОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ q-НОРМОЙ С ВЕСОМ БЕССЕЛЯ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА ПОЛУОСИ[1]

М. В. Дейкалова (Екатеринбург, Россия)

marina.deikalova@urfu.ru

Обозначим через $L^q_\alpha = L^q((0,\infty), x^{2\alpha+1})$ при $1 \le q < \infty$ и $\alpha > -1$ пространство комплекснозначных измеримых на $(0,\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^q_\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^q \, x^{2\alpha+1} dx\right)^{1/q}.$$

Пусть $\mathcal{E}(\sigma, q, \alpha)$ есть множество четных целых функций экспоненциального типа (не выше) $\sigma > 0$, сужение которых на полуось $[0,\infty)$ принадлежит пространству L^q_α.

В докладе будет обсуждаться точное неравенство

$$\|f\|_C \le M \, \|f\|_{L^q_\alpha}, \quad f \in \mathcal{E}(\sigma, q, \alpha), \tag{1}$$

между равномерной нормой и L^q_α-нормой функций класса $\mathcal{E}(\sigma, q, \alpha)$ при $1 \le q < \infty$ и $\alpha > -1/2$. Будет охарактеризована экстремальная функция, на которой это неравенство обращается в равенство. В частности, будет доказано, что экстремальная функция, достигает равномерной нормы только в концевой точке $x = 0$ полуоси. Для обоснования результатов применяется оператор обобщенного сдвига Бесселя.

[1]Исследования выполнены при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).