

4. Pilipović S., Stoeva D. T., Teofanov N. Frames for Fréchet spaces // Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. 2007. Vol. 32. P. 69–84.
5. Pilipović S., Stoeva D. T. Series expansions in Fréchet spaces and their duals, construction of Fréchet frames // J. Approx. Theory. 2011. Vol. 163, № 11. P. 1729–1747.
6. Абанина Т. И. К вопросу о понятии фрейма // Научное обозрение. 2013. № 9. С. 101–104.
7. Bonet J., Fernández C., Galbis A., Ribera J. M. Frames and representing systems in Fréchet spaces and their duals // Banach J. Math. Anal. Vol. 11, № 1. P. 1–20.

УДК 517.853

## О ФУНКЦИИ ПСЕВДОРАССТОЯНИЯ ДО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

В. В. Абрамова, С. И. Дудов (Саратов, Россия)  
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru

1. Рассмотрим функцию вида

$$\varphi(x) \equiv \min_{y \in \Omega} f(y - x), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — выпуклое замкнутое множество из конечномерного действительного пространства  $R^p$ ,  $f(x)$  — выпуклая конечная на  $R^p$  функция, имеющая единственную точку минимума  $x^* = 0_p \in R^p$ . В частном случае, когда функция  $f(x)$  удовлетворяет аксиомам нормы, функция  $\varphi(x)$  выражает расстояние от точки  $x$  до множества  $\Omega$  и уже этим интересна для приложений.

Введем обозначения:  $\partial f(x)$  — субдифференциал выпуклой функции  $f(x)$  в точке  $x$ ;  $K(x, \Omega)$  — конус возможных направлений множества  $\Omega$  в точке  $x$ ;  $K^+$  — конус, являющийся сопряженным к конусу  $K$ ;  $Q(x) = \{z \in \Omega : f(z - x) = \varphi(x)\}$ .

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Функция  $\varphi(x)$  является выпуклой и конечной на  $R^p$ , а формулу ее субдифференциала в любой точке  $x \in R^p$  можно представить в виде*

$$\partial\varphi(x) = -\{\partial f(z - x) \cap K^+(z, \Omega)\}, \quad (2)$$

где  $z$  — любая точка из множества  $Q(x)$ .

*Замечание.* Формула (2) является обобщением формулы субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества, полученной в [1]. Отметим так же другую форму представления субдифференциала функции расстояния в [2, гл. 2].

2. Для приложений так же интересен случай, когда множество  $\Omega$  является многогранным, но невыпуклым множеством, заданным в виде

$$\Omega = \{y \in R^p : \max_{i \in [1:m]} \{\langle A_i, y \rangle + b_i\} \geq 0\}, \quad (3)$$

где  $A_i \in R^p, b_i \in R$ .

Считаем далее, что  $M = \{y \in R^p : \langle A_i, y \rangle + b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset$ .  
Обозначим через

$$\Omega_i = \{y \in R^p : \langle A_i, y \rangle + b_i \geq 0\}, \quad \varphi_i(x) = \min_{y \in \Omega_i} f(y - x),$$

$$Q_i(x) = \{z \in \Omega_i : \varphi_i(x) = f(z - x)\}, \quad I(x) = \{i \in [1 : m] : \varphi(x) = \varphi_i(x)\},$$

$$K(A) = \{v = \alpha A : \alpha \geq 0\}, \quad \varphi'(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}(\varphi(x + \alpha g) - \varphi(x)).$$

**Теорема 2.** Если множество  $\Omega$  задано в форме (3), то функция  $\varphi(x)$  непрерывна и дифференцируема по любому направлению  $g \in R^p$  в любой точке  $x \in R^p$ , причем

$$\varphi'(x, g) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin M, \\ \min_{i \in I(x)} \max_{v \in \partial \varphi_i(x)} \langle v, g \rangle, & \text{если } x \in M, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\partial \varphi_i(x) = -\{\partial f(z - x) \cap K(A_i)\}$ ,  $z$  — любая точка из  $Q_i(x)$ .

*Замечание.* Множество  $\{\partial \varphi_i(x) : i \in I(x)\}$ , как следует из формулы (4), является верхним экзостером функции  $\varphi(x)$  в точке  $x \in M$  (см. [3]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудов С. И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.
2. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука. 1980. 320 с.
3. Демьянов В. Ф., Рощина В. А. Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказ. матем. журн. 2006. Т. 8, № 4. С. 19–31.

УДК 517.9

## О ДВУМЕРНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЬЮТОНА – ПАДЕ

Дж. Акал (Стамбул, Турция),  
А. Л. Лукашов (Москва, Россия)  
alexey.lukashov@gmail.com

Основная цель данной работы — предложить подход к построению двумерных многоточечных аппроксимаций Ньютона – Паде, позволяющий использовать его в символьных вычислениях.

В одномерном случае этот подход (хотя и без явного указания его возможностей для символьных вычислений) был предложен в [1]. Одной из основ этого подхода является следующая несложная доказываемая