УДК 517.958:[537.84:537.86]

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ[1]

Л. А. Грюнвальд, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)
lfb_o@yahoo.co.uk, orlov_sergey@inbox.ru

Пусть $\Delta_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — лапласиан по трем пространственным переменным, заданным на кубе $\Pi = [0;\, h]^3$, где $h > 0$, и $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция Эйлера параметра $\mu > 0$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta_3 v - \vartheta^2 v + \frac{\omega^2}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\mu-1} v_{zz}(\mathbf{r},\tau)d\tau = f(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{r} \in \Pi, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$v(\mathbf{r},t)\big|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0, \quad (2)$$

которая при $\mu = 2$ моделирует электронные (ионные) магнитозвуковые колебания [1, с. 40], описываемые потенциалом $v : \Pi \times \big[0;\, +\infty\big) \to \mathbb{R}$ электрического поля. В этом случае $\vartheta^2 = \frac{1}{\alpha^2 r_D^2}$, $f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{div}\mathbf{F_0}(\mathbf{r},t)$, причем вектор $\mathbf{F_0}$ задает распределение поляризации и намагниченности среды, а скалярные параметры — базовые характеристики электронно-ионной плазмы, а именно: $\alpha^2 = 1 + \frac{u_A^2}{c^2}$, где u_A — альфвеновская скорость, c — скорость света, r_D — радиус П. Дебая, ω — частота И. Ленгмюра.

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса существования и единственности решения краевой задачи (1), (2). Применяется редукция к уравнению в абстрактных пространствах. Рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$Bu(t) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^t (t-s)^{\mu-1} Au(s)ds = f(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $u = u(t)$ и $f = f(t)$ — неизвестная и заданная функции аргумента $t \geq 0$ со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, B и A — замкнутые линейные операторы с плотными в E_1 областями определения и $D(B) \subseteq D(A)$. Предполагается, что B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$. При $0 < \mu < 1$ уравнение (3) имеет слабую особенность. За скалярными уравнениями

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00291).

с таким ядром в научной литературе (см., например, [2]) закрепилось название *обобщенных интегральных уравнений Абеля.*

Определение 1. Под *классическим решением уравнения* (3) будем понимать функцию $u(t) \in \mathcal{C}(t \geq 0;\, E_1)$, обращающую данное уравнение в тождество.

Проблема разрешимости интегрального уравнения (3) с необратимым оператором B в главной части изучена авторами в [3], откуда может быть извлечена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый, а B — непрерывно обратимый операторы такие, что $D(B) \subseteq D(A)$, и $f(t) \in \mathcal{C}(t \geq 0; E_2)$, тогда уравнение* (3) *имеет единственное классическое решение*

$$u(t) = B^{-1}\Bigg(f(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} E_\mu\big((t-s)^\mu AB^{-1}\big) f(s)ds\Bigg),$$

где $E_\mu(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k\mu+1)}$ — функция Г. М. Миттаг-Леффлера.

По теореме о замкнутом графике $AB^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$. Нетрудно убедиться, что операторно функциональный ряд $\dfrac{\partial E_\mu(t^\alpha AB^{-1})}{\partial t}$ сходится равномерно в топологии $\mathcal{L}(E_2)$ на любом отрезке $\big[0;\, T\big]$, $T > 0$.

При выборе пространств

$$E_1 = \overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Pi) = \big\{w \in W_2^{l+2}(\Pi) :\, w(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0\big\}, \quad E_2 = H^l(\Pi),$$

где $W_2^{l+2}(\Pi)$ — пространтсво С. Л. Соболева, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (причем $H^0(\Pi)$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_2(\Pi)$ функций с суммируемым по А. Лебегу на Π квадратом), и задании операторов $B = \Delta_3 - \vartheta^2$, $A = -\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, уравнение (3) становится задачей (1), (2). Рассмотрим далее однородную граничную задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \lambda w = 0,\; w(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0.$$

Спектр $\sigma(\Delta_3)$ состоит из $\lambda_{k,m,n} = -\frac{\pi^2}{h^2}(k^2 + m^2 + n^2)$, k, m, $n \in \mathbb{N}$, т. е. за необходимостью $\lambda_{k,m,n} = -\frac{\pi^2}{h^2}s$, $s \in \mathbb{N}$, при этом кратность $d(\lambda_{k,m,n})$ собственного числа $\lambda_{k,m,n}$ совпадает с количеством различных решений $(k, m, n) \in \mathbb{N}^3$ уравнения $k^2 + m^2 + n^2 = s$ при данном $s \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание классическую теоретико-числовую теорему о представлении

натурального числа в виде суммы квадратов целых чисел [4, с. 344], можно получить точную формулу

$$d(\lambda_{k,m,n}) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k^2<s}} \Big(\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ s-k^2|d}} \chi_4(d) - \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{s-k^2 i^2} \Big),$$

в которой $\chi_4(d)$ — характер Дирихле по модулю 4 натурального числа d, δ_{ij} — символ Кронекера. Система собственных функций оператора Δ_3, ортонормированная в смысле скалярного произведения $(\cdot,\,\cdot)$ в $H^l(\Pi)$, имеет следующий вид:

$$w_{k,m,n}(\mathbf{r}) = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{h\nu_{k,m,n}}}\,\sin\frac{\pi k}{h}x\,\sin\frac{\pi m}{h}y\,\sin\frac{\pi n}{h}z,$$

где $\nu_{k,m,n} = \sum\limits_{0\le|\alpha|\le l} \big(\frac{\pi}{h}\big)^{2|\alpha|} k^{2\alpha_1} m^{2\alpha_2} n^{2\alpha_3}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $k,\,m,\,n\in\mathbb{N}$. Заметим, что $\vartheta^2 \notin \sigma(\Delta_3)$ ни при каком значении $\vartheta\in\mathbb{R}$, значит, оператор $B = \Delta_3 - \vartheta^2$ непрерывно обратим, также он является самосопряженным и, следовательно, фредгольмовым с $\dim N(B) = 0$. Из приведенной выше теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f(\mathbf{r},t)\in\mathcal{C}(t\ge 0; H^l(\Pi))$, *тогда граничная задача* (1), (2) *имеет в классе* $\mathcal{C}(t\ge 0; \overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Pi))$ *единственное решение*

$$v(\mathbf{r},t) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\vartheta^2-\lambda_{k,m,n}} \Big[(f,\,w_{k,m,n}) +$$

$$+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} E_\mu\big(-\frac{\pi^2 n^2\omega^2 (t-\tau)^\mu}{h^2(\vartheta^2-\lambda_{k,m,n})}\big)(f,\,w_{k,m,n})d\tau\Big] w_{k,m,n}(\mathbf{r}).$$

Справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} E_2\big(-\frac{\pi^2 n^2\omega^2}{h^2(\vartheta^2-\lambda_{k,m,n})}t^2\big) = -\frac{\pi n\omega}{h\sqrt{\vartheta^2-\lambda_{k,m,n}}}\sin\frac{\pi n\omega t}{h\sqrt{\vartheta^2-\lambda_{k,m,n}}},$$

которое согласуется со случаем $\mu = 2$, рассмотренным ранее в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007. 736 с.

2. *Gorenflo R., Vessella S.* Abel Integral Equations. Analysis and Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. 217 p.

3. *Грюнвальд Л. А., Орлов С. С.* Уравнение типа Абеля с вырождением в банаховых пространствах // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2016 : материалы междунар. конф. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2016. С. 239–241.

4. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М. : Мир, 1987. 416 с.

5. *Орлов С. С.* Краевая задача для интегро-дифференциального уравнения магнитозвуковых волн // Тр. Десятой Всерос. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Т. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара : СамГТУ, 2016. С. 65–69.

УДК 517.9

АЛГОРИТМ ТИПА АЛГОРИТМА ФРАНКА – ВУЛЬФА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ РЕГРЕССИИ[1]

А. А. Гудков, А. Р. Файзлиев, С. В. Миронов, С. П. Сидоров
(Саратов, Россия)
alex-good96@mail.ru

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, и обозначим Δ^k оператор взятия конечной разности порядка k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, определенный через рекуррентные соотношения

$$\Delta^k z_i = \Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i, \quad \Delta^0 z_i = z_i, \quad 1 \le i \le n-k.$$

Вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ называется k-монотонным, если $\Delta^k z_i \ge 0$ для всех $1 \le i \le n-k$. Так, вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ будет 1-монотонным (или просто монотонным), если $z_{i+1} - z_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, и 2-монотонные вектора являются выпуклыми.

Обозначим Δ_k^n множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$, которые являются k-монотонными. Задача построения k-монотонной регрессии состоит в нахождении вектора $z \in \mathbb{R}^n$ с наименьшей ошибкой приближения к заданному вектору $y \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно являющимся k-монотонным), при условии k-монотонности вектора z:

$$(z-y)^T(z-y) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \to \min_{z \in \Delta_k^n}. \tag{1}$$

Обзор результатов по задаче построения монотонной регрессии можно найти в книге Т. Робертсона, Ф. Райта и Р. Декстры [1], а также в статье [2]. В статье предлагается метод для нахождения решения задачи построения k-монотонной регрессии. Следуя работам [3] и [4], мы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-37-00060).