СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 297 с.

2. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М. : Наука, 1985. 216 с.

3. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 255 с.

УДК 517.518.3

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий
(Москва, Россия)
vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Орторекурсивные разложения [1, 2] являются естественным обобщением классических ортогональных разложений. При этом в случае определенных классов переполненных систем орторекурсивные разложения обеспечивают абсолютную устойчивость как к ошибкам в вычислении коэффициентов, так и к малым изменениям системы [3].

Напомним определение орторекурсивных разложений. Пусть H — пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ (для определенности будем рассматривать пространства над $\mathbb{R}$), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ — произвольная система ненулевых элементов, $f \in H$ — раскладываемый элемент. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f;$$

$$\widehat{f}_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{\|e_{n+1}\|^2}, \qquad r_{n+1} = r_n - \widehat{f}_{n+1} e_{n+1}.$$

Орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$.

Легко видеть, что если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с классическим рядом Фурье. Даже при нарушении ортогональности системы для орторекурсивных разложений выполняются классические свойства ортогональных разложений,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

такие как равенство Бесселя

$$\|r_N\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2 ,$$

неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

и эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу равенству Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2 = \|f\|^2$$

(см., например, [2]).

Для случая $H = L^2[0,1]$ было показано, что орторекурсивные разложения по системе характеристических функций двоичных промежутков и по обобщениям этой системы [2, 4], а также по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям [5–7], гарантированно сходятся к разлагаемому элементу в метрике L^2 (более того, сходимость сохраняется, если коэффициенты вычисляются с некоторой погрешностью). В случае систем характеристических функций и их обобщений параллельно с результатами о сходимости в метрике L^2 были получены и результаты о сходимости почти всюду. Для систем сжатий и сдвигов утверждения о сходимости почти всюду удалось получить лишь сравнительно недавно [8].

Оказывается, оба эти результата о сходимости почти всюду являются (по модулю ограничений на разлагаемую функцию) частными случаями более общей теоремы, применимой к широкому классу функциональных систем специального вида. Речь идет о системах, носители функций которых являются подмножествами соответствующих двоичных отрезков.

Чтобы сформулировать теорему, приведем сначала необходимые определения. Для натурального n через $k(n)$ и $j(n)$ обозначим такие целые неотрицательные числа, что $n = 2^{k(n)} + j(n)$ и $j(n) < 2^{k(n)}$ (легко видеть, что по n значения $k(n)$ и $j(n)$ определяются однозначно). Через Δ_n обозначим двоичный отрезок $\left[\frac{j(n)}{2^{k(n)}}, \frac{j(n)+1}{2^{k(n)}}\right]$. Значение $k(n)$ часто называют номером пачки двоичного отрезка Δ_n.

Рассмотрим систему функций $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих при всех $n \in \mathbb{N}$ следующим ограничениям:

(1) $\operatorname{supp} e_n(x) \subset \Delta_n$ (через supp здесь обозначен носитель);

(2) $\|e_n\|_2 = 1$;

(3) $e_n(x) \geqslant 0$ на Δ_n;

(4) e_n удовлетворяет на Δ_n условию Липшица с константой C_n.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L^2[0,1]$ и непрерывна почти всюду на этом отрезке, а константы C_n удовлетворяют условию*

$$C_n = O\left(n^{3/2}\right).$$

Тогда орторекурсивное разложение $f(x)$ по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на отрезке $[0,1]$.

В естественных терминах номеров пачек двоичных отрезков условие на C_n в приведенной теореме может быть переформулировано следующим образом:

$$C_n = O\left(2^{3k(n)/2}\right).$$

В терминах длин отрезков условие принимает вид

$$C_n = O\left(|\Delta_n|^{-3/2}\right).$$

Условие Липшица может быть ослаблено до условия Гёльдера с произвольным (но единым для всех функций системы) положительным показателем α. В этом случае условие на C_n запишется в виде

$$C_n = O\left(n^{\alpha+1/2}\right).$$

Возможны и другие обобщения, связанные с ослаблением требований как на систему $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, так и на разлагаемую функцию $f(x)$.

Также с двоичных отрезков теорема может быть перенесена на другие системы отрезков, покрывающие $[0,1]$ в смысле Витали и удовлетворяющие дополнительному ограничению на неперекрывание (если пара отрезков перекрывается, то отрезок с меньшим номером содержит отрезок с большим номером — см., в частности, Теорему 3 работы [2], а также условие (Ξ2) работы [4]). Однако при этом условие на константы C_n (которое в этом случае наиболее естественно формулируется в терминах длин отрезков системы) при сохранении общности результата становится несколько громоздким.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Саратовской зимней шк. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.

2. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.

3. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 1. С. 3–16.

4. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 7. С. 21–36.

5. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез. докл. Воронежской зимней матем. шк. Воронеж : ВГУ, 2001. С. 161–162.

6. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 11-й Саратовской зимней шк. Саратов : Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. С. 106–108.

7. *Политов В. А.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 3. С. 3–7.

8. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов // Теория функций, её приложения и смежные вопросы : материалы 13-й международной Казанской летней научной шк.-конф. Казань : Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2017. С. 99–101.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ

А. А. Голубков (Москва, Россия)
andrej2501@yandex.ru

Обратная задача для уравнения Штурма – Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

хорошо изучена только для случая вещественной переменной [1–2]. В докладе впервые поставлена обратная спектральная задача для уравнения (1) с потенциалом Q, кусочно-целым на лежащей в $\mathbf{C}$ спрямляемой кривой, и доказана единственность её решения. Показано, что хотя эта задача и может быть сведена к частично исследованной в [3] обратной задаче для уравнения Штурма – Лиувилля обобщенного вида с комплекснозначными коэффициентами на отрезке действительной оси, её непосредственное исследование более эффективно.

Определение. Функцию Q будем называть *кусочно-целой* на кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, соединяющей точки z_0, z_f и допускающей параметрическое задание непрерывной функцией $z = z(t)$ $(t \in [t_0, t_f], z(t_0) = z_0, z(t_f) = z_f)$,