А.М. Водолазов, О.А. Королева

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

А.М. Водолазов, О.А. Королева

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие по курсам «Алгебра», «Фундаментальная и компьютерная алгебра» и «Дополнительные главы геометрии и алгебры» для студентов механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий

ИЗДАТЕЛЬСТВО «АМИРИТ»
2018

УДК 512.5

Водолазов А.М., Королева О.А.

Избранные вопросы линейной алгебры: Учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. и фак. КНиИТ — Саратов: Изд-во «Амирит», 2018. — 64 с.: ил.

ISBN

В учебном пособие приведен теоретический материал и подробные решения базовых задач по курсам «Алгебра», «Фундаментальная и компьютерная алгебра» и «Дополнительные главы геометрии и алгебры» по основным темам: комплексные числа, многочлены, линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы, лямбда-матрицы, жордановы нормальные формы, функции от матриц.

Для студентов механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий.

Рекомендуют к печати:

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

механико-математического факультета

Саратовского государственного университета

Доктор физико-математических наук *Ю.А. Блинков*

Доктор физико-математических наук *Д.А. Бредихин*

УДК 512.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN

Введение

Учебное пособие соответствует материалу, изучаемому студентами в курсах «Алгебра», «Фундаментальная и компьютерная алгебра» и «Дополнительные главы геометрии и алгебры» механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий. В пособие приводится теоретический материал и решения базовых задач по темам: комплексные числа, многочлены, линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы, лямбда-матрицы, жордановы нормальные формы, функции от матриц. Последние темы обычно не успевают разобрать на практических занятиях. А они являются весьма сложными и используются в других курсах, в частности, дифференциальных уравнениях и численных методах. Эти темы, как правило, остаются на самостоятельное изучение студентам. Самостоятельная работа студентов является важной составляющей учебного процесса, которой отводится значительный объем часов в учебных планах подготовки бакалавров по различным направлениям. Самостоятельная работа позволяет студентам закрепить навыки и умения, приобретенные на аудиторных занятиях (лекциях, семинарах, лабораторных работах), проверить правильность понимания теоретических сведений, научиться решать основные типовые задачи. И наше учебное пособие можно успешно использовать в этой работе.

Для более подробного изучения теоретического материала может быть рекомендована следующая литература:

1. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. М., 1974.

2. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 1975.

3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М., 1978.

4. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., 1970.

5. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. М., 1968.

1 Комплексные числа

Задание 1.1

Решить квадратное уравнение

$$x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0.$$

Решение

Известная школьная формула корней квадратного уравнения верна для многочленов с коэффициентами над любым полем, и в частности над полем комплексных чисел.

Поэтому

$$\begin{aligned} x_{1,2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-4(-1+7i)}}{2}=\\ =\frac{(2+i)\pm\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot i+i^2+4-28i}}{2}=\\ =\frac{(2+i)\pm\sqrt{7-24i}}{2}. \end{aligned}$$

Для вычисления $\sqrt{7-24i}$ воспользуемся формулой

$$\sqrt{a+bi}=u+vi,$$

где

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+|z|)},\quad v=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+|z|)}.$$

Здесь $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, и знаки перед корнями выбираются из условия $uv=b/2$.

В нашем случае $\quad a=7,\quad b=-24,\quad |z|=\sqrt{7^2+24^2}=25.$

Значит,

$$\pm\sqrt{7-24i}=\pm(4-3i).$$

$$x_1=\frac{(2+i)+(4-3i)}{2}=3-i,$$
$$x_2=\frac{(2+i)-(4-3i)}{2}=-1+2i.$$

Задание 1.2

Написать формулу для ε_k корней восьмой степени из 1. Найти расстояние между точками с номерами $k_1 = 1$ и $k_2 = 4$.

Решение

Выпишем формулу для ε_k корней восьмой степени из 1 и вычислим расстояние между точками ε_1 и ε_4. Согласно общей формуле

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{8} + i\sin\frac{2\pi k}{8} = \cos\frac{\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi k}{4} \quad \text{или} \quad \varepsilon_k = e^{i\frac{\pi k}{4}},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. На комплексной плоскости точки ε_k образуют вершины правильного 8-угольника, вписанного в единичную окружность.

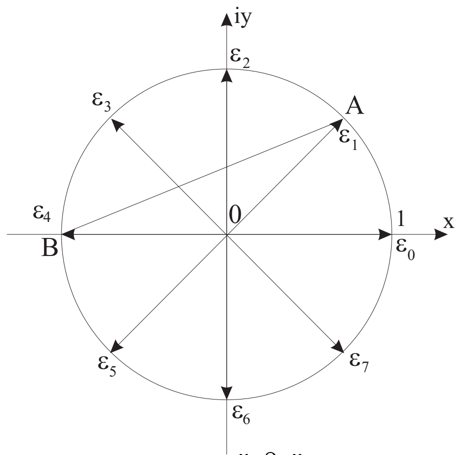

Рис. 1.1: Расположение корней 8-й степени из 1 на единичной окружности

Нас интересует отрезок AB на рис. 1.1, его длину можно найти по теореме косинусов:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\widehat{AOB} = 1^2 + 1^2 - 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 2 + \sqrt{2}.$$

Другой способ:

$$AB^2 = \left|e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{4\pi}{4}}\right|^2 = (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{4\pi}{4}})(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{4\pi}{4}}) = 1 - e^{i(\pi-\frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{\pi}{4}-\pi)} +$$

$$+1 = 2 - 2Re\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 - 2\cos\frac{3\pi}{4}.$$

Итак, расстояние равно

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

При вычислениях мы воспользовались следующим:

1) модуль комплексного числа — это длина вектора, его изображающего на комплексной плоскости;

2) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

3) если $z = e^{i\varphi}$, то $\overline{z} = e^{-i\varphi}$;

4) $z + \overline{z} = 2Re\ z$;

5) формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Задание 1.3

Вычислить выражение

$$A = \varepsilon^2(1+\varepsilon)^8(1-\varepsilon)^{12},\ \varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Решение

Пользуясь формулой Эйлера, запишем:

$$1+\varepsilon = 1 + \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12} + i2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

$$1-\varepsilon = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2\frac{\pi}{12} - i2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} =$$

$$= -2i\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = -2i\sin\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Отсюда

$$A = e^{i\frac{2\pi}{6}}\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)^8 e^{i\frac{8\pi}{12}}\left(-2i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12} e^{i\frac{12\pi}{12}} = e^{i\frac{4\pi+8\pi+12\pi}{12}}2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^8 \times$$

$$\times(-1)^{12}(i)^{12}\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12} = e^{i2\pi}2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^8\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12} =$$

$$= 2^{12}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)^8\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^4 =$$

$$= 2^{12}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^8\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^4 = 2^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^4 = 2^4\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^4 =$$

$$= 2^2\left(2\sin^2\frac{\pi}{12}\right)^2 = 2^2\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 = 2^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2-\sqrt{3})^2.$$

Задание 1.4

Решить уравнение

$$(x+1)^5 - (x-3)^5 = 0.$$

Решение

Перепишем

$$\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^5 = 1.$$

Извлекая корень пятой степени, будем иметь:

$$\frac{x+1}{x-3} = e^{\frac{2\pi ik}{5}}, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$x + 1 = e^{2\pi ik/5}(x-3),$$

$$\left(1 - e^{2\pi ik/5}\right)x = -\left(1 + 3e^{2\pi ik/5}\right),$$

$$x = -\frac{1+3e^{2\pi ik/5}}{1-e^{2\pi ik/5}} = -\frac{(1+3e^{2\pi ik/5})(1-e^{-2\pi ik/5})}{|1-e^{2\pi ik/5}|^2} =$$

$$= -\frac{1+3e^{2\pi ik/5} - e^{-2\pi ik/5} - 3}{\left(1-\cos\frac{2\pi k}{5}\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi k}{5}\right)^2} =$$

$$= -\frac{-2+3\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}\right) - \left(\cos\frac{2\pi k}{5} - i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)}{4\sin^2\frac{\pi k}{5}} =$$

$$= -\frac{-2+2\cos\frac{2\pi k}{5} + 4i\sin\frac{2\pi k}{5}}{4\sin^2\frac{\pi k}{5}} =$$

$$= \frac{2\left(1-\cos\frac{2\pi k}{5}\right) - 4i\sin\frac{2\pi k}{5}}{4\sin^2\frac{\pi k}{5}} = \frac{4\sin^2\frac{\pi k}{5} - i8\sin\frac{\pi k}{5}\cos\frac{\pi k}{5}}{4\sin^2\frac{\pi k}{5}} = 1 - 2i\mathrm{ctg}\frac{\pi k}{5},$$

где $k = 1, 2, 3, 4$.

При вычислениях мы использовали следующее:

1) умножение числителя и знаменателя на комплексное число, сопряженное знаменателю;

2) если $z = e^{i\varphi}$, то $\overline{z} = e^{-i\varphi}$;

3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

4) формулу Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$;

5) четность функции $\cos\varphi$ и нечетность $\sin\varphi$;

6) формулы для тригонометрических функций половинных углов.

Задание 1.5

Решить кубическое уравнение

$$x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0. \tag{1.1}$$

Решение

Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ заменой $x = y - \frac{a}{3}$ приводится к виду $y^3 + py + q = 0$. В нашем случае $x = y - 3$:

$$(y-3)^3 + 9(y-3)^2 + 18(y-3) + 28 = 0.$$

$$y^3 - 9y^2 + 27y - 27 + 9y^2 - 54y + 81 + 18y - 54 + 28 = 0,$$

$$y^3 - 9y + 28 = 0. \tag{1.2}$$

В этом уравнении $p = -9,\ q = 28$. Корни уравнения находятся по формуле Кардано:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

причем кубические корни u и v выбираются так, чтобы

$$u \cdot v = -\frac{p}{3} = 3. \tag{1.3}$$

Для уравнения (1.2)

$$u = \sqrt[3]{-14 + \sqrt{196 - 27}} = \sqrt[3]{-14 + \sqrt{169}} = \sqrt[3]{-14 + 13} = \sqrt[3]{-1}.$$

Один из корней $u = -1$.

Известно, что если один из корней n-й степени известен, то остальные $n-1$ корней получаются умножением известного корня на степени первообразного корня n-й степени из 1.

В нашем случае $n = 3$, а первообразный корень равен

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Таким образом, для u имеется три варианта:

$$u_1 = -1, \quad u_2 = -1 \cdot \varepsilon, \quad u_3 = -1 \cdot \varepsilon^2.$$

Из условия (1.3) находим $v_1 = \frac{3}{u_1} = -3$. Остальные варианты находятся умножением на степени ε. А способ комбинирования кубических корней u и v для получения корней уравнения (1.2) получается из условия (1.3). Возвращаясь к исходному неизвестному $x = y - 3$, получаем корни уравнения (1.1):

$$y_1 = u_1 + v_1 = -1 - 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -7;$$

$$y_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 = (-1)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + (-3)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 + \sqrt{3} i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = -1 + \sqrt{3} i;$$

$$y_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon = (-1)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + (-3)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 - \sqrt{3} i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -1 - \sqrt{3} i.$$

2 Многочлены

Задание 2.1

а) *Найти кратность корня $x = 2$ многочлена*

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8.$$

Решение

Выполним последовательные деления многочлена $f(x)$ на $x - 2$ с помощью схемы Горнера:

$f(x)$	1	-5	7	-2	4	-8
$x-2$	1	-3	1	0	4	0
	1	-1	-1	-2	0	
	1	1	1	0		
	1	3	7			

В первой строке этой таблицы записаны коэффициенты делимого, то есть многочлена $f(x)$. В каждой последующей строчке, начиная со второй, стоят коэффициенты неполного частного и остаток от деления на $x - 2$ многочлена, чьи коэффициенты стоят в предыдущей строке. Начиная со второй, строчки заполняются по следующему правилу: первый коэффициент сносится из предыдущей строчки, для заполнения следующих мест сносится вышестоящий коэффициент из предыдущей строчки и к нему прибавляется предыдущий найденный коэффициент умноженный на 2. Заполнение строк производится до первой строчки, которая не заканчивается нулем. Количество строчек, начиная со второй, заканчивающихся нулем, дает кратность корня.

В нашем случае кратность корня $x = 2$ равна 3.

б) *Найти значение многочлена и его производных при $x = 2$:*

$$f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10.$$

Решение

Как и в пункте а) выполняем последовательные деления $f(x)$ на $x-2$ и затем неполных частных.

$f(x)$	1	0	-4	6	-8	10	
$x-2$	1	2	0	6	4	18	$= f(2) \quad \Rightarrow \quad f(2) = 18,$
	1	4	8	22	48		$= f'(2)/1! \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 48,$
	1	6	20	62			$= f''(2)/2! \quad \Rightarrow \quad f''(2) = 124,$
	1	8	36				$= f'''(2)/3! \quad \Rightarrow \quad f'''(2) = 216,$
	1	10					$= f^{IV}(2)/4! \quad \Rightarrow \quad f^{IV}(2) = 240,$
	1						$= f^{V}(2)/5! \quad \Rightarrow \quad f^{V}(2) = 120.$

Остаток от k-го деления, то есть последний элемент в k-й строке, считая со второй, равен $\frac{f^{(k-1)}(2)}{(k-1)!}$.

Задание 2.2

Найти $\mathcal{HOD}$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и выразить его через f и g.

$$f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35,$$
$$g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25.$$

Решение

Для нахождения $\mathcal{HOD}$ используем алгоритм Евклида. Сначала делим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком:

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Затем делитель делим на остаток и так далее. Получим

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$

$$\ldots$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x) + r_{k+1}(x),$$

...

Деление продолжается до тех пор, пока остаток от деления не получится равным нулю. А последний, отличный от нуля остаток в этом процессе и будет $\mathcal{HOD}$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$. $\mathcal{HOD}(f,g) = d(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35 & g(x) \\ \cline{2-2}
\underline{x^6 - 3x^5 \ \ + 7x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 25x \qquad} & x - 1 = q_1(x) \\
-x^5 \ \ + 4x^4 \ \ - 7x^3 + 27x^2 - 10x + 35 & \\
\underline{-x^5 \ \ + 3x^4 \ \ - 7x^3 + 20x^2 - 10x + 25} & \\
x^4 \qquad + 0 \ \ + 7x^2 \qquad + 0 + 10 & = r_1(x).
\end{array}
$$

Итак, $f = g \cdot q_1 + r_1$.

Аналогично $g = r_1 q_2 + r_2$, где $q_2 = x - 3$, $\quad r_2 = x^2 + 5$.

Наконец, $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, где $q_3 = x^2 + 2$, $\quad r_3 = 0$.

Из предпоследнего деления получаем $d(x) = g - r_1 q_2 = x^2 + 5$. Затем, перебирая шаги алгоритма Евклида в обратном порядке, находим остатки и последовательно подставляем в получившееся выражение для $d(x)$.

$$r_1 = f - q_1 g,$$

$$d = r_2 = g - (f - q_1 g) q_2 = (1 + q_1 q_2) g - q_2 f.$$

Окончательно получаем:

$$d(x) = x^2 + 5 = (3 - x) f(x) + (x^2 - 4x + 4) g(x).$$

Задание 2.3

Отделить кратные множители в многочлене:

$$f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27.$$

Решение

Каноническое разложение $f(x)$ на неприводимые множители имеет вид

$$f(x) = a P_1^{k_1}(x) P_2^{k_2}(x) \dots P_s^{k_s}(x),$$

где a — старший коэффициент многочлена $f(x)$. Так как кратности $k_1, \dots, k_s$ при дифференцировании понижаются ровно на единицу, то

$$f'(x) = P_1^{k_1-1}(x) P_2^{k_2-1}(x) \dots P_s^{k_s-1}(x) \cdot Q(x),$$

где многочлены $Q(x)$ и $f(x)$ взаимнопросты. Тогда

$$\mathcal{HOD}(f, f') = d_1 = P_1^{k_1-1} P_2^{k_2-1} \dots P_s^{k_s-1}$$

и

$$f_1 = \frac{f}{d_1} = P_1 \dots P_s.$$

Аналогично

$$d_2 = (d_1, d_1') = P_1^{k_1-2} P_2^{k_2-2} \dots P_s^{k_s-2}$$

и, если $k_i \leqslant 2$, то соответствующий множитель отсутствует. Поэтому многочлен $f_2 = d_1/d_2$ будет состоять из неприводимых множителей с показателями $\geqslant 2$.

Далее $d_3 = (d_2, d_2')$, и многочлен $f_3 = d_2/d_3$ состоит из множителей, входящих в $f(x)$ с показателями $\geqslant 3$, и так далее. Отсюда частное от деления f_1 на f_2 составлено из неприводимых многочленов, входящих в $f(x)$ в первой степени, частное f_2 на f_3 состоит из неприводимых многочленов, входящих в $f(x)$, ровно во второй степени и так далее. В нашем случае:

$$f'(x) = 6x^5 - 60x^3 + 24x^2 + 102x - 72 \quad \sim \quad x^5 - 10x^3 + 4x^2 + 17x - 12.$$

$d_1 = (f, f')$ находим с помощью алгоритма Евклида:

$$d_1 = x^3 + x^2 - 5x + 3, \quad d_1' = 3x^2 + 2x - 5.$$

Тогда $\quad f_1 = f/d_1 = x^3 - x^2 - 9x + 9.$

Алгоритм Евклида дает: $\quad d_2 = (d_1, d_1') = x - 1, \quad d_2' = 1.$

$$f_2 = d_1/d_2 = x^2 + 2x - 3.$$

Так как $d_3 = (d_2, d_2') = 1$, то $f_3 = d_2/d_3 = x - 1$, $\quad f_4 = 1$.

$$f_1/f_2 = x - 3, \quad f_2/f_3 = x + 3, \quad f_3/f_4 = x - 1.$$

Отсюда находим

$$f(x) = (x-3)(x+3)^2(x-1)^3.$$

Задание 2.4

Разложить на простые дроби рациональную функцию:

$$R(x) = \frac{5x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2(x-2)}.$$

Решение

Многочлены $x - 2$ и $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ взаимнопросты, и значит, их наибольший общий делитель равен 1. С помощью алгоритма Евклида найдем этот наибольший делитель и выразим его через исходные многочлены. Поскольку многочлен $x - 2$ имеет первую степень, то в нашем случае достаточно одного деления

$$\begin{array}{rr|l}
x^2 + 2x & +1 & x-2 \\ \cline{3-3}
x^2 - 2x & & x+4 \\ \cline{1-1}
4x & +1 & \\
4x & -8 & \\ \cline{1-2}
 & 9 &
\end{array}.$$

Отсюда $\quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+4)(x-2) + 9;$

$$1 = \frac{1}{9}\left[(x^2 + 2x + 1) - (x+4)(x-2)\right].$$

Поэтому

$$R(x) = \frac{(5x^2+3x+1)\left[\frac{1}{9}(x+1)^2 - \frac{1}{9}(x+4)(x-2)\right]}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{5x^2+3x+1}{x-2} -$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{(5x^2+3x+1)(x+4)}{(x+1)^2}.$$

Разделим $5x^2 + 3x + 1$ на $x - 2$ с остатком по схеме Горнера:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 5 & 3 & 1 \\
\hline
2 & 5 & 13 & 27
\end{array},$$

$$5x^2+3x+1=(5x+13)(x-2)+27.$$

Значит,

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{5x^2+3x+1}{x-2}=\frac{1}{9}(5x+13)+\frac{3}{x-2}.$$

Обратимся ко второй дроби. Для этого вычислим ее числитель:

$$(5x^2+3x+1)(x+4)=5x^3+23x^2+13x+4$$

и поделим его на $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

$$\begin{array}{l|l}
5x^3+23x^2+13x+4 & x^2+2x+1 \\
\cline{2-2}
5x^3+10x^2+5x & 5x+13 \\
\cline{1-1}
\qquad 13x^2+8x+4 & \\
\qquad 13x^2+26x+13 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -18x-9 &
\end{array}$$

Значит, вторая дробь имеет вид

$$-\frac{1}{9}(5x+13)+\frac{2x+1}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$R(x)=\frac{3}{x-2}+\frac{2x+1}{(x+1)^2}.$$

Разложим последнюю дробь с помощью двукратного деления по схеме Горнера многочлена $2x+1$ на $x+1$:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & 2 & 1 \\
\hline
-1 & 2 & -1 \\
\hline
 & 2 & \\
\cline{1-2}
\end{array}.$$

Откуда

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}.$$

Окончательно получаем

$$R(x)=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Задание 2.5

Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 6x^2 - x + 3.$$

Решение

Известно, что если $\frac{p}{q}$ — корень многочлена $f(x)$: $f(\frac{p}{q}) = 0$ ($\frac{p}{q}$ — несократимая дробь), то q делит старший коэффициент, а p — свободный член. А также разность $p-qm$ для любого целого числа m делит значение многочлена в точке m ($f(m)$).

В нашем случае p может принимать значения $1,\ 3$, а q может принимать значения $\pm 1,\ \pm 2$. Если положим $m = 1$, то $p - q$ делит $f(1)$.

$$\text{При } m = -1 \text{ число } (p+q) \text{ делит } f(-1), \tag{2.1}$$

$$\text{а при } m = -2 \text{ число } (p+2q) \text{ делит } f(-2). \tag{2.2}$$

В нашем случае $f(1) = -12$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -75$.

Пусть $p = 1$. Перебираем q:

$$\begin{array}{cccc}
1-1 \nmid -12 & 1+1 \mid -12 & 1-2 \mid -12 & 1+2 \mid -12 \\
1+2 \mid -75 & \underline{1-2 \mid -75} & \underline{1+4 \mid -75} & \underline{1-4 \mid -75}
\end{array}$$

Пусть $p = 3$. Перебираем q:

$$\begin{array}{ccc}
3-1 \mid -12 & 3+1 \mid -12 & 3-2 \mid -12 \\
\underline{3+2 \mid -75} & \underline{3-2 \mid -75} & 3+4 \nmid -75
\end{array}$$

(То, что подчеркнуто, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2)). То есть эти рациональные дроби надо проверить на корень либо подстановкой в многочлен, либо по схеме Горнера.

	2	-3	-7	-6	-1	3
-1	2	-5	-2	-4	3	0
$\frac{1}{2}$	2	-2	-8	-10	-6	0
$-\frac{1}{2}$	2	-4	-5	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{21}{8} \neq 0$
-3	2	-9	20	-66	197	$-588 \neq 0$
3	2	3	2	0	-1	0

Таким образом, корнями являются -1, $\frac{1}{2}$, 3.

3 Линейные пространства

Задание 3.1

Векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ и $\overline{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ сами образуют базис и найти координаты вектора $\overline{x}$, в этом базисе.

$$\overline{e}_1 = (2, 1, -3); \qquad \overline{e}_2 = (3, 2, -5);$$
$$\overline{e}_3 = (1, -1, 1); \qquad \overline{x} = (6, 2, -7).$$

Решение

Базис — это максимальная линейно независимая система векторов. Во всех базисах число векторов одинаковое. Значит $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ образуют базис если они линейно независимы. Последнее эквивалентно линейной независимости столбиков их координат, а это, согласно критерию равенства нулю определителя, эквивалентно условию:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Подсчет дает

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = -1 \neq 0.$$

Итак, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ — базис. Матрица перехода S от исходного базиса к базису $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ согласно определению имеет столбцы, составленные из векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ в исходном базисе. Значит

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

столбик вектора $\overline{x}$ в новом базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Тогда связь между столбиками новых координат X и старыми координатами $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ задается формулой $SX = B$ или $X = S^{-1}B$. В нашем случае

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ вектор $\overline{x}$ имеет координаты $\overline{x} = (1, 1, 1)$.

Задание 3.2

Базисы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ и $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$, $\overline{e}'_3$ заданны координатами своих векторов в некотором исходном базисе $\overline{e}''_1$, $\overline{e}''_2$, $\overline{e}''_3$. Надо найти матрицу перехода от $\overline{e}$ к $\overline{e}'$.

$$\overline{e}_1 = (1,2,1); \qquad \overline{e}_2 = (2,3,3); \qquad \overline{e}_3 = (3,7,1).$$
$$\overline{e}'_1 = (3,1,4); \qquad \overline{e}'_2 = (5,2,1); \qquad \overline{e}'_3 = (1,1,-6).$$

Решение

Обозначим через S_1 и S_2 матрицы перехода от e'' к e и от e'' к e' соответственно, то есть

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix} = S_1^T \begin{pmatrix} \overline{e}''_1 \\ \overline{e}''_2 \\ \overline{e}''_3 \end{pmatrix}; \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{e}'_1 \\ \overline{e}'_2 \\ \overline{e}'_3 \end{pmatrix} = S_2^T \begin{pmatrix} \overline{e}''_1 \\ \overline{e}''_2 \\ \overline{e}''_3 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Из условия следует

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Из (3.1) следует, что

$$\begin{pmatrix} \overline{e}''_1 \\ \overline{e}''_2 \\ \overline{e}''_3 \end{pmatrix} = \left(S_1^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

А из (3.2) и (3.3) получаем:

$$\begin{pmatrix} \overline{e}'_1 \\ \overline{e}'_2 \\ \overline{e}'_3 \end{pmatrix} = S_2^T \left(S_1^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Так как $S_2^T \cdot \left(S_1^T\right)^{-1} = \left(S_1^{-1} \cdot S_2\right)^T$ то

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1' \\ \overline{e}_2' \\ \overline{e}_3' \end{pmatrix} = \left(S_1^{-1} S_2\right)^T \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство означает, что матрица перехода от e к e' равна $S_1^{-1} S_2$. Подсчет по известным формулам матричной алгебры дает

$$Q_{\overline{e} \to \overline{e}'} = S_1^{-1} S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.3

Показать, что существует единственный линейный оператор 3-х мерного пространства, переводящий векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ соответственно в векторы $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$, $\overline{e}_3'$ и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\overline{e}_1 = (1, 2, 1); \qquad \overline{e}_2 = (2, 3, 3); \qquad \overline{e}_3 = (3, 7, 1).$$
$$\overline{e}_1' = (3, 1, 4); \qquad \overline{e}_2' = (5, 2, 1); \qquad \overline{e}_3' = (1, 1, -6).$$

Решение

Матрицей A линейного оператора f относительно некоторого базиса называется матрица, столбцами которой являются координаты образов базисных векторов в этом же базисе. Если x — произвольный вектор из пространства, а $y = f(x)$ его образ, то координатные столбики векторов X и Y связаны соотношением:

$$Y = A_f \cdot X. \tag{3.4}$$

Линейный оператор однозначно определяется образами базисных векторов. Следовательно, для доказательства единственности линейного оператора, переводящего векторы $\overline{e}_1$; $\overline{e}_2$; ... $\overline{e}_n$ соответственно в векторы $\overline{e}'_1$; $\overline{e}'_2$; ... $\overline{e}'_n$, необходимо, чтобы векторы $\overline{e}_1$; $\overline{e}_2$; ... $\overline{e}_n$ образовывали базис. Составим из координат векторов $\overline{e}_1$; $\overline{e}_2$; ... $\overline{e}_n$ матрицу Q и вычислим ее определитель, равенство нулю которого означает линейную зависимость векторов.

$$|Q| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Так как определитель отличен от нуля, то наши векторы линейно независимы.

В качестве Y в равенстве (3.4) выступают векторы $\overline{e}'_i$, где $i = 1, 2, 3$. Составим из координатных столбцов векторов $\overline{e}'_i$ матрицу Q'.

$$Q' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Тогда из равенства (3.4) будет следовать

$$Q' = A_f \cdot Q.$$

Так как e — базис, то существует обратная матрица к Q. А сама матрица A_f будет вычисляться по формуле: $A_f = Q' \cdot Q^{-1}$.

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -95 & 24 & 19 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.4

Даны матрица A линейного оператора f и координаты вектора $\overline{x}$ относительно некоторого базиса e. Найти матрицу этого оператора f и *координаты вектора* $\overline{f(x)}$ *в новом базисе* e'.

$$A_{f|e} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\overline{x} \ = (0, 2, 4),$$

$$\overline{e}'_1 = (2, 3, 1); \qquad \overline{e}'_2 = (3, 4, 1); \qquad \overline{e}'_3 = (1, 2, 2).$$

Решение

Пусть A — матрица линейного оператора f в базисе e, а B — матрица этого же оператора в базисе e'. Тогда они связаны соотношением

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q,$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса e к базису e'. Вычисления дают:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A_{f|e'}$$

Пусть X — координатный столбик вектора $\overline{x}$ в базисе e, а Y', X' — координатные столбики $\overline{f(x)}$ и $\overline{x}$ в базисе e' соответственно. Тогда $Y' = B \cdot X'$, а $X' = Q^{-1} \cdot X$ (см. задание 3.1). Тогда

$$Y' = B \cdot Q^{-1} \cdot X.$$

После всех вычислений $Y' = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{f(x)}' = (2, -4, 6).$

Задание 3.5

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, если известна матрица A этого оператора в некотором базисе.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение

Собственные значения линейного оператора f, определенного на векторном пространстве над полем k, являются корнями характеристического многочлена $\chi(\lambda)$, лежащими в основном поле k. Характеристический многочлен оператора — это определитель характеристической матрицы $\lambda E - A$ для любой матрицы A этого оператора в любом из базисов, то есть $\chi(\lambda) = |\lambda E - A|$, где E — единичная матрица, соответствующей размерности. В нашем случае:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 12 & -6 \\ -10 & \lambda + 19 & -10 \\ -12 & 24 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 0 & -6 \\ -10 & \lambda - 1 & -10 \\ -12 & 2\lambda - 2 & \lambda - 13 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 0 & -6 \\ -10 & 1 & -10 \\ -12 & 2 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 0 & -6 \\ -10 & 1 & -10 \\ 8 & 0 & \lambda + 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -6 \\ 8 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 49 + 48) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Итак, получили следующие собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i имеют координатные столбики $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, являющиеся решениями следующей системы однородных уравнений, записанной в матричном виде: $(\lambda_i E - A)X = 0$. Для $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ матрица этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -10 & 20 & -10 \\ -12 & 24 & -12 \end{pmatrix}$$

Фундаментальную систему решений можно найти по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -10 & 20 & -10 \\ -12 & 24 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim (1, -2, 1) \sim x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

x_1 — зависимая переменная, x_2, x_3 — независимые: $x_1 = 2x_2 - x_3$. Придавая x_2, x_3 значения (1,0) и (0,1), получаем фундаментальную систему решений

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому произвольный собственный вектор для собственного значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ будет иметь вид:

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 — произвольные скаляры из основного поля.

Аналогично

$$(\lambda_3 E - A) = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_3 \\ x_2 = \frac{5}{6} x_3 \end{cases}$$

Значит для собственного значения $\lambda_3 = -1$ собственные вектора будут иметь вид $X = \begin{pmatrix} 3c \\ 5c \\ 6c \end{pmatrix}$, где c — произвольный скаляр основного поля.

Задание 3.6

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе. Найти ортогональную проекцию $\overline{b}$ на $\overline{a}$.

$$\overline{a} = (-1, 0, 1), \qquad \overline{b} = (2, -6, 4).$$

Решение

Рис. 3.1: Ортогональная проекция

На рис. 3.1 вектор $\overline{c}$ — ортогональная проекция $\overline{b}$ на $\overline{a}$. Это означает, что для некоторого скаляра α имеем: $\overline{c} = \alpha\overline{a}$ и $\overline{c}(\overline{c} - \overline{b}) = 0$ (скалярное произведение). Подставив значение $\overline{c}$ из первого равенства во второе, получим: $\alpha\overline{a}(\alpha\overline{a} - \overline{b}) = 0$. Скаляр $\alpha = 0$ если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны, то есть $\overline{a}\overline{b} = 0$, а это не так, в чем убеждаемся вычислением:

$$\overline{a}\overline{b} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-6) + 1 \cdot 4 = 2 \neq 0.$$

Итак, $\alpha \neq 0$, и из последнего равенства имеем $\alpha\overline{a}^2 - \overline{a}\overline{b} = 0$. Откуда

$$\alpha = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\overline{a}^2} = \frac{(-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-6) + 1 \cdot 4}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Подставляем получившееся значение α в формулу для определения $\overline{c}$, получаем ответ:

$$\overline{c} = \alpha\overline{a} = 1 \cdot \overline{a} = (-1, 0, 1).$$

Задание 3.7

Применить процесс ортогонализации к системе векторов заданных координатами в ортонормированном базисе.

$$\bar{a}_1 = (1, 2, 2, -1); \quad \bar{a}_2 = (1, 1, -5, 3); \quad \bar{a}_3 = (3, 2, 8, -7).$$

Решение

Процесс ортогонализации приводит к построению ортогонального базиса в подпространстве, порожденного исходными векторами. Построение такого базиса выполняется по формулам:

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1; \ \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - \frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_2)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}\bar{b}_1; \ \ldots \ \bar{b}_n = \bar{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \bar{b}_i, \quad \text{где} \quad c_i = \frac{(\bar{b}_i, \bar{a}_n)}{(\bar{b}_i, \bar{b}_i)}.$$

Произведем вычисления:

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1, 2, 2, -1);$$

$$\bar{b}_2 = (1, 1, -5, 3) - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{1^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2}(1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2);$$

$$\bar{b}_3 = (3, 2, 8, -7) - \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + (-7) \cdot (-3)}{1^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2}(1, 2, 2, -1) -$$

$$- \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot (-3) + (-7) \cdot 2}{2^2 + 3^2 + (-3)^2 + 2^2}(2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2).$$

В результате получаем

$$\bar{b}_1 = (1, 2, 2, -1); \ \bar{b}_2 = (2, 3, -3, 2); \ \bar{b}_3 = (2, -1, -1, -2).$$

4 Квадратичные формы

Задание 4.1

Матрица линейного оператора f в некотором базисе равна A. Скалярное произведение векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ в этом базисе задается билинейной формой F. Найти матрицу сопряженного оператора f^* относительно того же базиса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 11x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_2 + 3x_2y_3.$$

Решение

Составим матрицу коэффициентов билинейной формы $F(x, y)$, которая является матрицей Грамма векторов базиса, так как коэффициенты формы совпадают со скалярным произведением соответствующих базисных векторов:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Если обозначим матрицу оператора f^* через B, то для ее нахождения в евклидовом пространстве имеется следующая формула:

$$B = G^{-1} \cdot A^T \cdot G.$$

В нашем случае получаем

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 4.2

Найти инварианты и определить классификационный тип квадратичной формы

$$F = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$$

Решение

Составим матрицу квадратичной формы, взяв коэффициенты при смешанных произведениях с множителем $\frac{1}{2}$:

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приведем форму к нормальному виду над полем действительных чисел по методу Лагранжа. Выпишем сначала все одночлены в F, содержащие x:

$$x^2 + 4xy + 2xz. \tag{4.1}$$

Выражение (4.1) сократим на x и возьмем половинные коэффициенты при смешанных произведениях, получим линейную форму с коэффициентами, стоящими в первой строчке матрицы A_F

$$x + 2y + z. \tag{4.2}$$

Выразим форму (4.1) через квадрат линейной формы (4.2)

$$x^2 + 4xy + 2xz = (x + 2y + z)^2 - 4y^2 - z^2 - 4yz.$$

Теперь выполним первую замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = x + 2y + z; \\ y_1 = y; \\ z_1 = z, \end{cases}$$

после которой форма принимает вид:

$$F(x_1, y_1, z_1) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = x_1^2 - 3y_1^2 + 2z_1^2 - 2y_1z_1.$$

Возьмем теперь в полученной форме одночлены, содержащие, y_1:

$$-3y_1^2 - 2y_1^2z_1^2;$$

составляем соответствующую линейную форму $-3y_1 - z_1$ и с помощью формулы квадрата суммы получаем:

$$-3y_1^2 - 2y_1^2z_1^2 = -\frac{1}{3}(-3y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{3}z_1^2.$$

Выполняем замену переменных

$$\begin{cases} x_2 = x_1; \\ y_2 = -3y_1 - z_1; \\ z_2 = z_1, \end{cases}$$

после чего форма примет вид:

$$F(x_2, y_2, z_2) = x_2^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 2\frac{1}{3}z_2^2 = x_2^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{7}{3}z_2^2.$$

Произведем еще одну замену

$$\begin{cases} x_3 = x_2; \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2; \\ z_3 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}z. \end{cases}$$

И окончательно получаем нормальный вид над полем $\mathbb{R}$ для формы F:

$$F(x_3, y_3, z_3) = x_3^2 - y_3^2 + z_3^2.$$

Отсюда получаем инварианты исходной формы:

- ранг $r = 3$;
- положительный индекс инерции $p = 2$;
- отрицательный индекс инерции $q = 1$;
- сигнатура $s = p - q = 1$.

Так как в нашем случае $p \neq 0$, $q \neq 0$, то форма F является неопределенной.

Другими классификационными типами квадратичных форм над $\mathbb{R}$ помимо неопределенных являются следующие:

1. Положительно определенные формы, при $q = 0, \ p = r = n$, где n-число переменных в исходной форме.

2. Положительно полуопределенные формы, при $q = 0, \ p = r \leqslant n$.

3. Отрицательно определенные формы, при $p = 0,\ p = r = n$.

4. Отрицательно полуопределенные формы, при $p = 0,\ q = r \leqslant n$.

5 λ-матрицы

Определение 5.1. λ-матрицей называется квадратная матрица порядка n с элементами, являющимися многочленами с коэффициентами из основного поля k.

Символом $d_k(\lambda)$ будем обозначать $\mathcal{HOD}$ всех миноров k-го порядка данной λ-матрицы. Совокупность $d_k(\lambda)$, $k = \overline{1,n}$, назовем системой делителей миноров (СДМ).

Определение 5.2. Элементарными преобразованиями λ-матрицы называются следующие преобразования:

1. Умножение любой строки (столбца) на отличное от нуля число из поля k.

2. Прибавление к любой строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на многочлен.

Определение 5.3. Две λ-матрицы называются эквивалентными, если одна из этих матриц может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Определение 5.4. Нормальной диагональной формой (НДФ) λ-матрицы называется диагональная матрица, эквивалентная данной, на главной диагонали которой стоят нормированные многочлены $f_1(\lambda),\ f_2(\lambda), \ldots,\ f_n(\lambda)$, причем каждый делит следующий.

Эти многочлены называются инвариантными множителями λ-матрицы, они не меняются в результате элементарных преобразований. Объединение их называется системой инвариантных множителей

(СИМ). Очевидно, что если среди этих многочленов есть единицы, то они стоят на первых местах, а если есть нули, то они на последних местах (число нулей совпадает с числом $n-r$, где n — порядок матрицы, а r — ее ранг). Связь СИМ и СДМ:

$$d_k(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot f_k(\lambda), \qquad k = \overline{1,n}.$$

Определение 5.5. Степени неприводимых многочленов входящих в разложение многочлена называются элементарными делителями этого многочлена. Системой элементарных делителей (СЭД) λ-матрицы называется объединение (быть может, с повторениями) элементарных делителей ее инвариантных множителей $f_i(\lambda)$.

Задание 5.1

Данную матрицу привести к НДФ при помощи делителей миноров

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

Решение

По определению

$$d_1(\lambda) = \mathcal{HOD}(\lambda(\lambda-1), \lambda(\lambda-2), (\lambda-1)(\lambda-2)) = 1.$$

$$d_2(\lambda) = \mathcal{HOD}(\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2), \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2, \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2) =$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

$$d_3(\lambda) = det(A(\lambda)) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$$

Тогда

$$f_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1.$$

$$f_2(\lambda) = d_2(\lambda)/d_1(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

$$f_2(\lambda) = d_3(\lambda)/d_2(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Таким образом, нормальная диагональная форма данной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

Данную задачу можно решить с помощью элементарных делителей. Система элементарных делителей клеточно-диагональной матрицы совпадает с объединением элементарных делителей ее клеток, значит можем выписать СЭД данной λ-матрицы: СЭД$=\{\lambda,\ \lambda,\ (\lambda-1),\ (\lambda-1),\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)\}$. Так как порядок матрицы равен трем, то имеется три инвариантных множителя: $f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ f_3(\lambda)$, а так как ранг равен трем, то все они отличны от нуля. Поскольку $f_3(\lambda)$ делится на все остальные, то $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Из оставшихся элементарных делителей в $f_2(\lambda)$ входят также λ, $(\lambda-1)$, $(\lambda-2)$. Значит $f_2(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$, а $f_1(\lambda) = 1$, так как элементарных делителей больше нет. Удобно пользоваться следующей таблицей:

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 1 \end{array}$$

Число столбцов совпадает с рангом, строки заполняются степенями неприводимых многочленов. Произведение многочленов по столбикам, начиная с последнего, дают нам соответственно $f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ f_3(\lambda)$. Таким образом, нормальная диагональная форма нашей матрицы равна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

Задание 5.2

Данную матрицу при помощи элементарных преобразований привести к НДФ

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Решение

Введем обозначения: i-ю строку будем обозначать i°, i-й столбец — $i^\vee$, $\sim$ — символ эквивалентности.

$$A(\lambda) \overset{1^\circ-3^\circ}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix} \overset{2^\circ-3^\circ\cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Если теперь от второй строки отнимем первую и поменяем строки местами, получим

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1^\circ/2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & (\lambda^2-\lambda)/2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee\cdot 2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^\vee-1^\vee}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{3^\vee-1^\vee\cdot(\lambda^2-\lambda)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda^2-\lambda & \lambda(2\lambda-\lambda^2+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^\circ+1^\circ\cdot(1-\lambda)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda(2\lambda-\lambda^2+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee-2^\vee\cdot 2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^3+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee+2^\vee\cdot\lambda}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee+2^\vee}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee\cdot 1/2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^\vee\leftrightarrow 3^\vee}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee+2^\vee\cdot(1-\lambda)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица и будет нормальной диагональной формой матрицы $A(\lambda)$.

Задание 5.3

Найти нормальную диагональную форму λ-матрицы, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n

$$\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2; \quad r=4, \quad n=5.$$

Решение

Воспользуемся таблицей

$$\begin{matrix} (\lambda+1)^2 & \lambda+1 & \lambda+1 & 1 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda-1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Таким образом, нормальная диагональная форма нашей матрицы равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 5.4

Матрицу из задания 5.2 привести к НДФ путем умножения на унимодулярные матрицы специального вида.

Решение

Определение 5.6. Унимодулярной матрицей называется λ-матрица с определителем, равным элементу основного поля, отличному от нуля. Специальными унимодулярными матрицами являются:

$$S_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$, i — номер строки и столбца, в которых стоит α,

$$T_{ij}(f(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & f(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где $f(\lambda)$ — произвольный многочлен с коэффициентами из основного поля k, стоящий в i-й строке и j-м столбце ($i \neq j$).

Любое элементарное преобразование λ-матрицы можно получить с помощью умножения слева или справа на унимодулярную матрицу специального вида:

1. $S_i(\alpha)A(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ умножением i-й строки на α.

2. $T_{ij}(f(\lambda))A(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ прибавлением к i-й строке j-й строки, умноженной на $f(\lambda)$.

3. $A(\lambda)S_i(\alpha)$ получается из $A(\lambda)$ умножением j-го столбца на α.

4. $A(\lambda)T_{ij}(f(\lambda))$ получается из $A(\lambda)$ прибавлением к j-му столбцу i-го столбца, умноженного на $f(\lambda)$.

Замечание 5.1. Перестановку i-й и j-й строк (столбцов) можно осуществить с помощью умножения слева (справа) исходной матрицы на матрицу:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы перестановкой i-й и j-й строки (i-го и j-го столбца).

С помощью обозначений, которые мы ввели в задании 5.2, это задание не сложно выполнить. Обозначим НДФ этой матрицы через $D(\lambda)$. Тогда

$$D(\lambda) = T_{21}(1-\lambda)S_1(1/2)\tau_{23}T_{21}(-1)T_{23}(-3)T_{13}(-1)A(\lambda)S_3(2)\times$$

$$\times T_{12}(-1)T_{13}(\lambda-\lambda^2)T_{23}(-2)T_{23}(\lambda)T_{23}(1)S_3(1/2)\tau_{23}T_{23}(1-\lambda).$$

После перемножения получается, что

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 Подобие матриц. Нормальная жорданова форма квадратных матриц

Определение 6.1. Скалярной матрицей будем называть матрицу с элементами из основного поля.

Определение 6.2. Две скалярные матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица Q, такая что $A = Q^{-1}BQ$.

Определение 6.3. Характеристической матрицей для матрицы A называется матрица $\chi_A(\lambda) = \lambda E - A$. Определитель характеристической матрицы называется характеристическим многочленом матрицы A.

Определение 6.4. СИМ, СДМ, СЭД скалярной матрицы называются СИМ, СДМ, СЭД ее характеристической матрицы.

Теорема 6.1. *Матрицы подобны тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы эквивалентны.*

Эта теорема означает, что матрицы подобны тогда и только тогда, когда их СИМ или СДМ, или СЭД вместе с порядком, совпадают.

Рассмотрим приведение матрицы к нормальной жордановой форме.

Определение 6.5. Жордановой клеткой называется квадратная матрица следующего вида:

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

где n — порядок клетки, α — параметр клетки. Ее единственный элементарный делитель $(\lambda - \alpha)^n$.

Рассмотрим жорданову матрицу, то есть клеточно-диагональную матрицу, клетками которой служат клетки Жордана. Обозначим ее $[J_{n_1}(\alpha_1), J_{n_2}(\alpha_2), \dots, J_{n_s}(\alpha_s)]$. Ее СЭД$= \{(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \dots, (\lambda - \alpha_s)^{n_s}\}$.

Определение 6.6. Нормальной жордановой формой скалярной матрицы A называется жорданова матрица J, такая что $J \approx A$.

Матрица, подобная такой жордановой матрице, называется матрицей, приводимой к нормальной жордановой форме (НЖФ).

Теорема 6.2. *Скалярная матрица A приводится к НЖФ тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен разлагается на линейные множители над основным полем.*

Задание 6.1

Привести к НЖФ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим характеристическую матрицу для A и элементарными преобразованиями приведем ее к НДФ.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}.$$

Значит, СЭД $=\{(\lambda-2),(\lambda-2)^2\}$. НЖФ исходной матрицы равна

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.2

Для данных матриц A и B найти невырожденную матрицу Q, такую, что $B = Q^{-1}AQ$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Решение

Для матрицы A составим характеристическую и приведем ее к НДФ. Аналогично для матрицы B. Их НДФ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix},$$

а значит жорданова форма:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем матрицу T, такую что $J = T^{-1}AT \Rightarrow TJ = AT$. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \qquad T_j = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ t_{3i} \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда последнее равенство запишется:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix},$$

а по столбикам:

$$2T_1 = AT_1,\ 2T_2 = AT_2,\ T_2 + 2T_3 = AT_3.$$

После преобразования получим:

$$(2E - A)T_1 = 0,\ (2E - A)T_2 = 0,\ (2E - A)T_3 = T_2.$$

T_1 и T_2 являются решениями одного и того же однородного линейного уравнения. Они должны быть линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений. Это всегда можно сделать, так как число жордановых клеток равно размерности пространства собственных векторов. T_2 надо подбирать таким образом, чтобы третье уравнение, которое эквивалентно системе линейных уравнений, имело решение, то есть чтобы ранг матрицы равнялся рангу расширенной матрицы. Матрица T находится неоднозначно.

После решения получаем

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для матрицы B найдем невырожденную матрицу R, такую, что $J = R^{-1}BR$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зная R и T, найдем Q

$$T^{-1}AT = R^{-1}BR,$$

$$B = (TR^{-1})A(TR^{-1}),$$

значит, $Q = TR^{-1}$. После подсчета получаем

$$Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 30 & -18 & -24 \\ 8 & -4 & -6 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.3

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda^2 + 5\lambda + 3 & -\lambda^2 + \lambda + 2 & -\lambda + 6 \\ -3\lambda^2 + 7\lambda + 11 & -3\lambda^2 + 9\lambda + 1 & -2\lambda + 8 \\ -\lambda^2 + 2\lambda + 8 & -2\lambda^2 + 5\lambda + 3 & -\lambda + 4 \end{pmatrix}$$

разделить слева на $B - \lambda E$, *где*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Определение 6.7. Минимальным многочленом матрицы называется ненулевой нормированный аннулирующий многочлен матрицы наименьшей степени.

Доказывается, что минимальный многочлен матрицы равняется последнему инвариантному множителю матрицы. А характеристический многочлен равняется произведению всех инвариантных множителей. Значит, корни у минимального и характеристического многочленов одинаковые, только кратности могут быть разными.

Пусть

$$A(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \ldots + A_{l-1}\lambda + A_0.$$

Определение 6.8. λ-матрица $A(\lambda)$ называется регулярной, если $detA_0 \neq 0$.

Предположим, что $B(\lambda)$ — регулярная λ-матрица степени m и что существуют такие λ-матрицы $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$, причем степень $R(\lambda)$ меньше m, что

$$A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda).$$

В этом случае мы будем называть $Q(\lambda)$ правым частным $A(\lambda)$, а $R(\lambda)$ правым остатком при левом делении на $B(\lambda)$. Аналогично определяется левое частное и левый остаток при правом делении.

Теорема 6.3. *Пусть $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — λ-матрицы степени l, m соответственно и $B(\lambda)$ — регулярная. Тогда существуют правое частное и правый остаток $A(\lambda)$ при делении на $B(\lambda)$ и подобно этому существуют левое частное и левый остаток.*

Заметим, что членом наивысшей степени λ-матрицы $B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda^{l-m}$ будет как раз $A_0\lambda^l$. В нашем случае $l = 2$, $m = 1$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\lambda^2+6\lambda & -\lambda^2+3\lambda & 0 \\ -3\lambda^2+9\lambda & -3\lambda^2+9\lambda & 0 \\ -\lambda^2+4\lambda & -2\lambda^2+5\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A(\lambda) = B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda + A^{(1)}(\lambda),$$

где $A^{(1)}(\lambda)$ — матрица, степень которой l_1 не превосходит $l-1=1$. За $A_0^{(1)}$ обозначим ее старший коэффициент.

$$A^{(1)}(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda+6 \\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8 \\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -2\lambda^2+6\lambda & -\lambda^2+3\lambda & 0 \\ -3\lambda^2+9\lambda & -3\lambda^2+9\lambda & 0 \\ -\lambda^2+4\lambda & -2\lambda^2+5\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda+3 & 2 & -\lambda+6 \\ -2\lambda+11 & 1 & -2\lambda+8 \\ -2\lambda+8 & 3 & -\lambda+4 \end{pmatrix}.$$

Повторяем процесс для $A^{(1)}(\lambda)$.

$$B(\lambda)B_0^{-1}A_0^{(1)}\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda+2 & 0 & -\lambda+3 \\ -2\lambda+8 & 0 & -2\lambda+6 \\ -2\lambda+6 & 0 & -\lambda+3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(1)}(\lambda) = B(\lambda)B_0^{-1}A_0^1 + A^{(2)}(\lambda),$$

Степень остатка $A^{(2)}(\lambda)$ не выше 0. Найдем ее.

$$A^{(2)}(\lambda) = A^{(1)}(\lambda) - B(\lambda)B_0^{-1}A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda+3 & 2 & -\lambda+6 \\ -2\lambda+11 & 1 & -2\lambda+8 \\ -2\lambda+8 & 3 & -\lambda+4 \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} -\lambda+2 & 0 & -\lambda+3 \\ -2\lambda+8 & 0 & -2\lambda+6 \\ -2\lambda+6 & 0 & -\lambda+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем цепочку равенств

$$A(\lambda) = B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda + B(\lambda)B_0^{-1}A_0^1 + A^{(2)}(\lambda) =$$

$$= B(\lambda)(B_0^{-1}A_0\lambda + B_0^{-1}A_0^1) + A^{(2)}(\lambda).$$

Значит

$$A(\lambda) = B(\lambda)\begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda & 1 \\ 3\lambda+2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda+2 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.4. *Если характеристические матрицы $A-\lambda E$ и $B-\lambda E$ двух матриц эквивалентны, то сами эти матрицы подобны. При этом, если $B-\lambda E = P(A-\lambda E)Q$, где P, и Q - унимодулярные λ-матрицы и P_0, и Q_0 — остатки при делении P слева, а Q справа на $B-\lambda E$, то $B = P_0AQ_0$ и $P_0Q_0 = E$, то есть матрицы P_0, и Q_0 осуществляют подобное преобразование матрицы A в матрицу B.*

Задание 6.4

Пользуясь методом, указанным в теореме 6.4, для данных матриц A и B найти невырожденную матрицу T, такую, что $B = T^{-1}AT$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}.$$

Решение

Также, как и в задание 5.4, найдем сначала унимодулярные матрицы, с помощью умножения на которые матрицы $A-\lambda E$ и $B-\lambda E$ переходят в свою НДФ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} = S_2(-1)T_{21}(-\lambda-1)(A-\lambda E)\tau_{12}T_{12}(5-\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda+1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -9 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda+5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= S_2(-1)T_{21}(-\lambda+38)S_1\left(-\frac{1}{16}\right)\tau_{12}(B-\lambda E)S_2(-16)T_{12}(-\lambda-34) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ -1 & -\frac{1}{16}\lambda+\frac{19}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda-38 & 81 \\ -16 & \lambda+34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda-34 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая правые части равенств, получим

$$\begin{pmatrix} \lambda-38 & 81 \\ -16 & \lambda+34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -9 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix} =$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -9 & \lambda+1 \end{pmatrix} Q.$$

Теперь надо разделить P слева, а Q справа на $B-\lambda E$, но так как степени P и Q равны 0, то остатки $P_0 = P$, $Q_0 = Q$. Проверим

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -39 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix}.$$

Значит

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix}.$$

7 Функции от матриц

Предположим, что минимальный многочлен матрицы A имеет своими корнями $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$ с кратностями $m_1, m_2, \dots m_s$, то есть минимальный многочлен для A имеет вид

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Определение 7.1. Спектром матрицы назовем таблицу

$$SpecA = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ m_1 & \dots & m_s \end{bmatrix}.$$

$$f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

называются значениями функции f на спектре матрицы A. Про любую функцию f, для которой эти числа существуют, мы будем говорить, что она определена на спектре матрицы A.

Определение 7.2. Если функция f определена на спектре, то положим $f(A) = g(A)$ где g — произвольный многочлен, принимающий те же значения, что и f, на спектре A.

Такой многочлен всегда существует, например, интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра.

Если A имеет простой спектр (корни минимального многочлена кратности 1), то в качестве g можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) l_k(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

где

$$l_k(\lambda) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{s} (\lambda - \lambda_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{s} (\lambda_k - \lambda_j)}.$$

Задание 7.1

Вычислить значение функции от матрицы

$$A^{100}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим характеристический многочлен и найдем его корни

$$\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda-5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Корнями будут $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$ с кратностями 1, они же будут и корнями минимального многочлена с такой же кратностью. Тогда $f(\lambda_1) = = 2^{100},\ f(\lambda_2) = 3^{100}$, а

$$l_1(\lambda) = \frac{(\lambda-3)}{2-3} = -(\lambda-3), \quad l_2(\lambda) = \frac{(\lambda-2)}{3-2} = (\lambda-2).$$

Теперь можно записать интерполяционный многочлен

$$L(\lambda) = -2^{100}(\lambda-3) + 3^{100}(\lambda-2).$$

Тогда

$$f(A) = L(A) = -2^{100}(A-3E) + 3^{100}(A-2E).$$

$$f(A) = -2^{100}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 3^{100}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100} & -2^{101} \\ 3\cdot 2^{100} & -2^{101} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cdot 3^{100} & 2\cdot 3^{100} \\ -3^{101} & 3^{101} \end{pmatrix}.$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100} - 2\cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}.$$

Если спектр матрицы одноточечный, то интерполяционный многочлен Лагранжа не подойдет. Нам понадобится интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра, который в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \\ &= f(\lambda_1) + \tfrac{(\lambda-\lambda_1)}{1!}f'(\lambda_1) + \tfrac{(\lambda-\lambda_1)^2}{2!}f''(\lambda_1) + \ldots + \tfrac{(\lambda-\lambda_1)^{m_1-1}}{(m_1-1)!}f^{(m_1-1)}(\lambda_1). \end{aligned}$$

Замечание 7.1. Клетка Жордана имеет одноточечный спектр. Поэтому

$$f(J_n(\alpha)) = \begin{pmatrix} f_0 & \frac{1}{1!}f_0^{(1)} & \frac{1}{2!}f_0^{(2)} & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f_0^{(n-1)} \\ 0 & f_0 & \frac{1}{1!}f_0^{(1)} & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f_0^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1!}f_0^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_0 \end{pmatrix},$$

где $f_0^{(i)} = f^{(i)}(\alpha)$.

Задание 7.2

Вычислить значение функции от матрицы

$$\sqrt{A}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим характеристический многочлен и найдем его корни

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 1 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)^2.$$

Корень $\lambda_1 = 4$ с кратностью 2, он же будет и корнем минимального многочлена с такой же кратностью, так как, очевидно, первый инвариантный множитель равен 1. Тогда $f(\lambda_1) = \pm 2$, а

$$L(\lambda) = \pm 2 + \frac{(\lambda - 4)}{1!} \cdot \frac{1}{2(\pm 2)} = \pm\frac{1}{4}(8 + (\lambda - 4)).$$

$$f(A) = L(A) = \pm\frac{1}{4}(8E + (A - 4E)) = \pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.1. *Если A — клеточно-диагональная матрица*

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_p]$$

и f определена на спектре, то значение функции от матрицы равно клеточно-диагональной матрице, клетками которой являются значения функции от клеток матрицы

$$f(A) = [f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_p)].$$

Теорема 7.2. *Если A и B — подобные матрицы с преобразующей матрицей Q, то есть $A = Q^{-1}BQ$, и f определена на спектре, то $f(A) = Q^{-1}f(B)Q$.*

Используя эти теоремы и значение функции от клетки Жордана, можно найти значение функции от любой матрицы, если только функция определена на спектре этой матрицы.

8 Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение

   а) $x^2 - 6x + 17 - 6i = 0$,

   б) $x^2 - 8x + 13 - 4i = 0$,

   в) $x^2 - 10x + 28 - 4i = 0$,

   г) $x^2 - 2x + 6 - 12i = 0$,

   д) $x^2 - 4x + 4 - 2i = 0$.

2. Написать формулу для корней ε_k из единицы степени n. Найти расстояние между точками с номерами $k = N_1$ и $k = N_2$. Нарисовать картинку.

   а) $n = 7$, $N_1 = 0$, $N_2 = 6$,

   б) $n = 7$, $N_1 = 1$, $N_2 = 5$,

   в) $n = 8$, $N_1 = 0$, $N_2 = 7$,

   г) $n = 6$, $N_1 = 1$, $N_2 = 4$,

   д) $n = 4$, $N_1 = 0$, $N_2 = 3$.

3. Вычислить выражение A.

   а) $A = \varepsilon(1+\varepsilon)^6(1-\varepsilon)^6, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{7}}$,

   б) $A = \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^8, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{7}}$,

   в) $A = \varepsilon(1+\varepsilon)^4(1-\varepsilon)^10, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{4}}$,

   г) $A = \varepsilon^2(1+\varepsilon)^6(1-\varepsilon)^2, \quad \varepsilon = e^{\frac{\pi i}{3}}$,

   д) $A = \varepsilon(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^4, \quad \varepsilon = e^{\frac{\pi i}{2}}$.

4. Решить уравнение.

   а) $(x+1)^7 - (x-3)^7 = 0$,

   б) $(x+2)^7 - (x-1)^7 = 0$,

   в) $(x+1)^8 - (x-8)^8 = 0$,

   г) $(x+2)^6 - (x-3)^6 = 0$,

   д) $(x+1)^4 - (x-1)^4 = 0$.

5. Решить уравнение.

   а) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$,

   б) $x^3 + 12x^2 + 42x + 49 = 0$,

   в) $x^3 + 15x^2 + 69x + 104 = 0$,

   г) $x^3 + 3x^2 - 15x + 18 = 0$,

   д) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

6. Применяя схему Горнера: а) найти кратность x_0 многочлена f; б) найти значение многочлена f и его производных при $x = x_1$.

   а) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 10x + 3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 3$,

   б) $f(x) = x^4 + 14x^3 + 72x^2 + 160x + 128$, $x_0 = -2$, $x_1 = 1$,

   в) $f(x) = x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$,

   г) $f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8$, $x_0 = -2$, $x_1 = 3$,

   д) $f(x) = x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36$, $x_0 = -2$, $x_1 = 2$,

7. Найти НОД d многочленов f и g и выразить его через f и g.

   а) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 12x + 9,$

   $g(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^2 + 6x + 9,$

   б) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 9x + 4,$

   $g(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 4,$

   в) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 9x + 10,$

   $g(x) = x^5 + 3x^3 + 5x^2 - x + 10,$

   г) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 13x^2 + 11x + 3,$

   $g(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + 7x + 3,$

   д) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2,$

   $g(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - x + 2,$

8. Отделить кратные множители многочлена f.

   а) $f(x) = x^6 + 12x^5 + 57x^4 + 136x^3 + 171x^2 + 108x + 27,$

   б) $f(x) = x^6 + 12x^5 + 57x^4 + 138x^3 + 180x^2 + 120x + 32,$

   в) $f(x) = x^6 + 12x^5 + 54x^4 + 120x^3 + 141x^2 + 84x + 20,$

   г) $f(x) = x^6 + 13x^5 + 69x^4 + 191x^3 + 290x^2 + 228x + 72,$

   д) $f(x) = x^6 + 7x^5 + 20x^4 + 30x^3 + 25x^2 + 11x + 2.$

9. Разложить на простые дроби рациональную функцию R.

   а) $R = \frac{6x^2+31x+31}{(x+1)^2(x+7)},$

   б) $R = \frac{5x^2+27x+44}{(x+2)^2(x+7)},$

   в) $R = \frac{7x^2+29x+29}{(x+1)^2(x+8)},$

   г) $R = \frac{4x^2+30x+52}{(x+2)^2(x+6)},$

   д) $R = \frac{3x^2+10x+10}{(x+1)^2(x+4)}.$

10. Найти рациональные корни многочлена f.

а) $f(x) = 12x^5 - 23x^4 - 27x^3 - 36x^2 - x + 3$,

б) $f(x) = 3x^5 - 7x^4 - 16x^3 - 15x^2 - 5x + 4$,

в) $f(x) = 6x^5 - 23x^4 - 29x^3 - 30x^2 - x + 5$,

г) $f(x) = 15x^5 = 2x^4 - x^3 - 15x^2 - 2x + 1$,

д) $f(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 2$.

11. Векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ и $\overline{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

а) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_2 = (1, 2, 1)$; $\overline{e}_3 = (3, 6, 4)$; $\overline{x} = (13, 25, 16)$.

б) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_2 = (2, 3, 2)$; $\overline{e}_3 = (1, 5, 2)$; $\overline{x} = (8, 25, 12)$.

в) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_2 = (1, 2, 1)$; $\overline{e}_3 = (2, 7, 3)$; $\overline{x} = (13, 40, 18)$.

г) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_2 = (2, 3, 2)$; $\overline{e}_3 = (3, 4, 4)$; $\overline{x} = (11, 15, 12)$.

д) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_2 = (1, 2, 1)$; $\overline{e}_3 = (1, 3, 2)$; $\overline{x} = (4, 9, 6)$.

12. Базисы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ и $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$, $\overline{e}'_3$ заданы координатами своих векторов в некотором исходном базисе $\overline{e}''_1$, $\overline{e}''_2$, $\overline{e}''_3$. Надо найти матрицу перехода от $\overline{e}$ к $\overline{e}'$.

а) $\overline{e_1} = (5, 4, 3)$; $\overline{e}_2 = (5, 5, 4)$; $\overline{e}_3 = (1, 1, 1)$;

$\overline{e}'_1 = (20, 19, 15)$; $\overline{e}'_2 = (22, 19, 15)$; $\overline{e}'_3 = (28, 25, 19)$.

б) $\overline{e}_1 = (4, 3, 1)$; $\overline{e}_2 = (5, 5, 4)$; $\overline{e}_3 = (1, 1, 1)$;

$\overline{e}'_1 = (29, 27, 19)$; $\overline{e}'_2 = (18, 17, 13)$; $\overline{e}'_3 = (23, 19, 10)$.

в) $\overline{e}_1 = (4, 3, 2)$; $\overline{e}_2 = (6, 6, 5)$; $\overline{e}_3 = (1, 1, 1)$;

$\overline{e}'_1 = (36, 35, 29)$; $\overline{e}'_2 = (19, 17, 14)$; $\overline{e}'_3 = (33, 28, 21)$.

г) $\overline{e}_1 = (6, 5, 3)$; $\overline{e}_2 = (2, 2, 1)$; $\overline{e}_3 = (1, 1, 1)$;

$\overline{e}'_1 = (17, 15, 10)$; $\overline{e}'_2 = (23, 20, 12)$; $\overline{e}'_3 = (14, 13, 8)$.

д) $\overline{e}_1 = (3, 2, 1)$; $\overline{e}_2 = (3, 3, 2)$; $\overline{e}_3 = (1, 1, 1)$;

$\overline{e}'_1 = (10, 9, 6)$; $\overline{e}'_2 = (8, 7, 5)$; $\overline{e}'_3 = (10, 8, 5)$.

13. Показать, что существует единственный линейный оператор 3-х мерного пространства, переводящий векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ соответственно в векторы $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$, $\overline{e}'_3$, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

а) $\overline{e}_1 = (4, 3, 4)$; $\overline{e}_2 = (3, 1, 3)$; $\overline{e}_3 = (3, 1, 4)$;

$\overline{e}'_1 = (1, 3, 3)$; $\overline{e'_2} = (3, 1, 3)$; $\overline{e}'_3 = (3, 3, 1)$.

б) $\overline{e}_1 = (2, 1, 2)$; $\overline{e}_2 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_3 = (4, 2, 5)$;

$\overline{e}'_1 = (2, 1, 4)$; $\overline{e}'_2 = (4, 2, 1)$; $\overline{e}'_3 = (1, 4, 2)$.

в) $\overline{e}_1 = (3, 2, 3)$; $\overline{e}_2 = (2, 1, 2)$; $\overline{e}_3 = (5, 1, 6)$;

$\overline{e}'_1 = (1, 2, 5)$; $\overline{e}'_2 = (5, 1, 2)$; $\overline{e}'_3 = (2, 5, 1)$.

г) $\overline{e}_1 = (4, 1, 4)$; $\overline{e}_2 = (3, 1, 3)$; $\overline{e}_3 = (1, 2, 2)$;

$\overline{e}'_1 = (2, 3, 1)$; $\overline{e}'_2 = (1, 2, 3)$; $\overline{e}'_3 = (3, 1, 2)$.

д) $\overline{e}_1 = (2, 1, 2)$; $\overline{e}_2 = (1, 1, 1)$; $\overline{e}_3 = (2, 1, 3)$;

$\overline{e}'_1 = (1, 1, 2)$; $\overline{e}'_2 = (2, 1, 1)$; $\overline{e}'_3 = (1, 2, 1)$.

14. Даны матрица A линейного оператора f и координаты вектора $\overline{x}$ относительно некоторого базиса e. Найти матрицу этого оператора f и координаты вектора $\overline{f(x)}$ в новом базисе e'.

а)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\overline{e}'_1 = (4, 3, 1)$; $\overline{e}'_2 = (4, 4, 1)$; $\overline{e}'_3 = (3, 3, 1)$; $\overline{x} = (0, 3, 3)$.

б)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\overline{e}'_1 = (2, 4, 1)$; $\overline{e}'_2 = (3, 5, 1)$; $\overline{e}'_3 = (1, 4, 1)$; $\overline{x} = (0, 1, 4)$.

в)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\overline{e}'_1 = (3, 5, 1)$; $\overline{e}'_2 = (3, 6, 1)$; $\overline{e}'_3 = (2, 5, 1)$; $\overline{x} = (0, 2, 5)$.

г)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\overline{e}'_1 = (4, 1, 1)$; $\overline{e}'_2 = (5, 2, 1)$; $\overline{e}'_3 = (3, 1, 1)$; $\overline{x} = (0, 3, 1)$.

д)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\overline{e}'_1 = (2, 2, 1)$; $\overline{e}'_2 = (2, 3, 1)$; $\overline{e}'_3 = (1, 2, 1)$; $\overline{x} = (0, 1, 2)$.

15. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, если известна матрица A этого оператора в некотором базисе.

а)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -12 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 26 & 22 \\ -6 & -5 & -6 \\ -14 & -17 & -12 \end{pmatrix}.$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

г)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

д)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе. Найти ортогональную проекцию $\overline{b}$ на $\overline{a}$.

а) $a = (1, 3, 3)$, $b = (3, -1, 1)$.

б) $a = (2, 1, 4)$, $b = (1, -2, 1)$.

в) $a = (1, 2, 5)$, $b = (2, -1, 1)$.

г) $a = (2, 3, 1)$, $b = (3, -2, 1)$.

д) $a = (1, 1, 2)$, $b = (1, -1, 1)$.

17. Применить процесс ортогонализации к системе векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

а) $a_1 = (1, 0, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 0, 3)$, $a_3 = (0, 0, 1, 3)$.

б) $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (0, 1, 0, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 4)$.

в) $a_1 = (1, 0, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 0, 2)$, $a_3 = (0, 0, 1, 5)$.

г) $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (0, 1, 0, 3)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$.

д) $a_1 = (1, 0, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 0, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 2)$.

18. Матрица линейного оператора f в некотором базисе равна A. Скалярное произведение векторов $\overline{a} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\overline{b} = (y_1, y_2, y_3)$ в этом базисе задается билинейной формой F. Найти матрицу сопряженного оператора f^* относительно того же базиса.

а)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$F = x_1y_1 + x_2y_2 + 19x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2.$

б)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$F = x_1y_1 + x_2y_2 + 18x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2.$

в)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$F = x_1y_1 + x_2y_2 + 30x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2.$

г)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$F = x_1y_1 + x_2y_2 + 11x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$

д)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$F = x_1y_1 + x_2y_2 + 8x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2.$

19. Найти инварианты и определить классификационный тип квадратичной формы F.

а) $F = -x^2 - 7y^2 - 7z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$

б) $F = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz + 14yz.$

в) $F = -x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 2xy - 2xz - 16yz.$

г) $F = 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 4xz + 8yz.$

д) $F = -x^2 - 2xy - 2xz + 4yz.$

20. Привести заданное уравнение кривой к каноническому виду декартовым (ортогональным) преобразованием координат и указать это преобразование.

а) $15x^2 - 2\sqrt{55}xy + 9y^2 = 20.$

б) $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 12.$

в) $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 = 22.$

г) $4xy + 3y^2 = 36.$

д) $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$

21. Следующие λ – матрицы привести к нормальной диагональной форме путем элементарных преобразований.

а)

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 & 2\lambda - 6\lambda^3 & -\lambda^2 + 5\lambda^3 + 4\lambda^4 \\ 2\lambda^2 - \lambda + \lambda^3 & -8\lambda^2 + 2\lambda - 2\lambda^3 & 8\lambda^2 - 4\lambda + 9\lambda^3 + \lambda^4 \\ \lambda^2 + \lambda & -2\lambda^2 - 2\lambda & 5\lambda^2 + 4\lambda + \lambda^3 \end{pmatrix};$$

б)

$$\begin{pmatrix} 2\lambda+2 & -4\lambda^2-4 & 2\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda-6 \\ \lambda^2+6\lambda+1 & -2\lambda^3-2\lambda-10\lambda^2-2 & \lambda^4+3\lambda^3-11\lambda^2-3 \\ \lambda-1 & -2\lambda^2+2 & \lambda^3-3\lambda^2+3 \end{pmatrix};$$

в)

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+2\lambda \\ 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+3\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda+\lambda^3 & \lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2-6\lambda \end{pmatrix};$$

г)

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda^3 & -2\lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2-\lambda+8\lambda^3+4\lambda^4 & -8\lambda^2+2\lambda-2\lambda^3 & 4\lambda^3+7\lambda^2-3\lambda \\ 4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+3\lambda^4 & -2\lambda^3-2\lambda & 3\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix};$$

д)

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & -3+3\lambda^2-\lambda^3 & 3\lambda^2-10\lambda+9 \\ -2+3\lambda+\lambda^2 & -2+7\lambda^2+3\lambda^3-\lambda & -17\lambda+6+\lambda^3-4\lambda^2 \\ \lambda-1 & -1+2\lambda^2 & \lambda^2-6\lambda+3 \end{pmatrix};$$

22. Найти жорданову форму J матрицы A. Найти невырожденную матрицу Q, такую, что $J = Q^{-1}AQ$.

а)

$$A = \begin{pmatrix} 37 & -25 & -20 \\ 21 & -13 & -12 \\ 35 & -25 & -18 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} -20 & 10 & 13 \\ 38 & -21 & -26 \\ -57 & 30 & 38 \end{pmatrix};$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} -48 & 35 & 55 \\ 27 & -24 & -33 \\ -54 & 42 & 63 \end{pmatrix};$$

г)

$$A = \begin{pmatrix} -45 & 35 & 55 \\ 27 & -21 & -33 \\ -54 & 42 & 66 \end{pmatrix};$$

д)

$$A = \begin{pmatrix} -39 & 24 & 48 \\ 22 & -11 & -26 \\ -46 & 27 & 56 \end{pmatrix};$$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

ВОДОЛАЗОВ Александр Михайлович

КОРОЛЕВА Ольга Артуровна

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие для студентов
механико-математического факультета
и факультета компьютерных наук и информационных технологий

Подписано в печать . .2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл.печ.л. ( ) Уч.-изд.л. Тираж экз. Заказ

Издательство «Амирит»
410000, Саратов, Чернышевского, 88.
Типография «Амирит»
410000, Саратов, Чернышевского, 88.