Математические заметки

Том 110 выпуск 6 июнь 2021

УДК 517.51

Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем

С. Ф. Лукомский, П. А. Терехин, С. А. Чумаченко

Рассматриваются системы сжатий и сдвигов сплайн–функций ψ_m, каждая из которых получается последовательным интегрированием и антипериодизацией предыдущей, а начальной функцией служит функция Хаара χ. Доказывается, во-первых, что каждая такая функция ψ_m есть сумма конечного числа рядов по хаосам Радемахера нечетных порядков, и, во-вторых, что при каждом m система сжатий и сдвигов функции ψ_m образует базис Рисса, причем нижние и верхние границы Рисса этих систем могут быть выбраны универсальными, т.е. независящими от m.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: функции Радемахера, хаос Радемахера, система Хаара, система сжатий и сдвигов, сплайны, базис Рисса, границы Рисса.

1. Введение

Хорошо известно (см., напр., [1]), что система Хаара является ортонормированным базисом пространства $L^2(0,1)$ и обладает базисными свойствами во многих других функциональных пространствах. Однако, система Хаара состоит из разрывных функций. Естественный вопрос о построении базисов из систем сжатий и сдвигов гладких функций имеет давнюю историю. Система Фабера–Шаудера является (за исключением одной из функций) системой сжатий и сдвигов интеграла от функции Хаара и образует базис пространства $C(0,1)$, но не пространств $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. Система Франклина — ортогонализация системы Фабера–Шаудера, как известно, обладает базисными свойствами во всех $L^p(0,1)$, но функции этой системы не имеют такой же простой структуры, как у систем сжатий и сдвигов. Подобное замечание относится и к системам Чисельского — обобщениям системы Франклина, получаемым ортогонализацией многократно проинтегрированной системы Хаара. Конструкции сплайн–всплесков Стремберга [2] и Баттла–Лемарье [3] дают положительное решение вопроса о базисности систем сжатий и сдвигов (систем всплесков), определенных на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. В рамках теории всплесков разработаны также другие методы построения гладких мастшабирующих функций и всплесков (см., напр., [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, № 16-01-00152.

В настоящей работе так же, как и в ситуации классических систем Хаара и Фабера–Шаудера, рассматриваются системы сжатий и сдвигов, определенные на отрезке $[0,1]$. Система Хаара — это единственный ортонормированный базис среди таких систем функций. Поэтому мы ставим вопрос о нахождении гладких базисов Рисса из систем сжатий и сдвигов конкретных сплайн–функций, которые имеют достаточно "простую" структуру и "регулярный" способ построения.

Функцию ψ_m, порождающую такой базис Рисса, определяем как m-интеграл от функции Уолша $w_{2^{m+1}-1}$ в нумерации Пэли. Функции ψ_m являются сплайнами и могут быть заданы индуктивно: каждый следующий сплайн ψ_{m+1} получается как результат интегрирования и антипериодизации предыдущего сплайна ψ_m, при этом начальной функцией служит функция Хаара $\psi_0 = \chi$, которую, в свою очередь, можно рассматривать как антипериодизацию функции 1, тождественно равной единице. Заметим, что процедура антипериодизации проинтегрированной функции на каждом шаге построения сплайнов ψ_m является в определенном смысле заменой процесса ортогонализации Грама–Шмидта. При этом сплайны ψ_m имеют простую двоичную структуру: все точки, в которых их производные меняют знак, являются двоично-рациональными.

Основным инструментом доказательства базисности по Риссу систем сжатий и сдвигов рассматриваемых сплайн-функций и оценки нижних и верхних границ Рисса является представление сплайна ψ_m в виде суммы конечного числа рядов по хаосам Радемахера нечетных порядков. История и свойства хаосов Радемахера изложены, например, в монографии С. В. Асташкина [5]. Вопрос о представлении конкретных функций рядами по хаосам Радемахера берет начало с работы С. Б. Стечкина и П. Л. Ульянова [6], из последних работ отметим [7], где получены представления многочленов Бернулли рядами по хаосам Радемахера.

Статья организована следующим образом. В пункте 2 приведено определение двоичных сплайнов ψ_m, порождающих системы сжатий и сдвигов, и сформулированы основные результаты. В пункте 3 получено индуктивное выражение для введенных сплайнов и их представление через хаосы Радемахера. Пункт 4 содержит признак ортогональности общей системы сжатий и сдвигов, сформулированный в терминах свойств спектра Уолша порождающей функции. В пункте 5 получены оценки для границ Рисса сплайновых аффинных систем. Наконец, заметим, что при $m = 1$ базисность по Риссу системы сжатий и сдвигов функции ψ_1 была ранее доказана в работе [8].

2. Основные результаты

Рассмотрим последовательность $\psi_m(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, сплайнов порядка m с узлами $\frac{1}{2^{m+1}}\mathbb{Z}$, производная порядка m которых равна

$$\psi_m^{(m)}(t) = \varkappa_m \prod_{k=0}^{m} r_k(t), \qquad t \notin \tfrac{1}{2^{m+1}}\mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

где $\varkappa_m = 2^{m(m+5)/2}$ и $r_k(t)$ — функции Радемахера, причем выполняются условия

$$\psi_m(0) = \psi_m'(0) = \ldots = \psi_m^{(m-1)}(0) = 0. \tag{2.2}$$

Определение 1. *Сплайновой аффинной системой порядка m назовем систему сжатий и сдвигов $\{\psi_{m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ функции $\psi_m\chi_{[0,1]}$.*

Как обычно, под системой сжатий и сдвигов функции f с носителем $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$ понимаем последовательность функций

$$f_0(t) = 1, \qquad f_n(t) = 2^{k/2} f(2^k t - l), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $n = 2^k + l$, $k = 0, 1, \ldots$ и $l = 0, \ldots, 2^k - 1$. В частности, формально полагая $m = 0$ в (2.1), получим систему Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая является системой сжатий и сдвигов функции $\chi = r\chi_{[0,1]}$, $r(t) = \operatorname{sign}\sin(2\pi t)$. Мы используем следующую нумерацию функций Радемахера: $r_k(t) = r(2^k t)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Определение 2. *Хаосом Радемахера порядка $d = 1, 2, \ldots$ называется семейство функций $r_{i_1} \ldots r_{i_d}$, $0 \leqslant i_1 < \ldots < i_d$. Множество всех функций вида*

$$f = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} r_{i_1} \ldots r_{i_d}, \qquad \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_d} |a_{i_1,\ldots,i_d}|^2 < \infty,$$

обозначают $\mathcal{R}_{ch}^d$.

Теорема 1. *Справедливо представление*

$$\psi_m = r - \sum_{s=1}^{m} f_{m,s}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

где $f_{m,s} \in \mathcal{R}_{ch}^d$ при $d = 2s + 1$, $s = 1, \ldots, m$.

Сформулированная теорема служит инструментом доказательства следующего основного результата настоящей работы.

Теорема 2. *Для каждого $m = 1, 2, \ldots$ сплайновая аффинная система $\{\psi_{m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса. При этом для всех $m = 1, 2, \ldots$ и всех $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ выполняются неравенства*

$$\frac{1}{10}\|c\|_{\ell^2} \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_{m,n} \right\| \leqslant \frac{19}{10}\|c\|_{\ell^2}.$$

Напомним, что базисом Рисса (базисом, эквивалентным ортонормированному) называется последовательность функций $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0,1)$, для которой существуют изоморфизм T пространства $L^2(0,1)$ и ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ такие, что $\psi_n = Te_n$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Границами Рисса последовательности $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называются постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ выполняются неравенства

$$A\|c\|_{\ell^2} \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n \right\| \leqslant B\|c\|_{\ell^2}.$$

Ясно, что для базиса Рисса имеем $A = \|T^{-1}\|^{-1}$ и $B = \|T\|$.

Таким образом, теорема 2 показывает, что границы Рисса сплайновых аффинных базисов Рисса $\{\psi_{m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ могут быть выбраны независящими от m. Это означает, что базисные разложения по рассматриваемым сплайновым аффинным системам обладают устойчивостью, универсальной по отношению к порядку гладкости, или, другими словами, коэффициенты обусловленности B^2/A^2 сплайновых аффинных систем ограничены в совокупности, что играет важную роль в приложениях.

3. Вспомогательные утверждения

Для 1-периодических функций $f(t)$ обозначим

$$W_0 f(t) = f(2t), \qquad W_1 f(t) = r(t) f(2t),$$

— операторы двоичных сжатия–модуляции и

$$V f(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

— оператор Вольтерра. Наконец, положим

$$U = 4W_1 V$$

— оператор интегрирования и последующей антипериодизации (функция вида $f = W_1 g$ является $\frac{1}{2}$-антипериодической: $f(t+\frac{1}{2}) = -f(t)$ и для антипериодических функций множитель 4 сохраняет нормировку $(f,r) = 1 \Rightarrow (Uf, r) = 1$).

Прежде всего, укажем индуктивное построение сплайнов ψ_m, эквивалентное их заданию через производные (2.1) и (2.2).

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$\psi_m = U^m r, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Заметим, что для периодических суммируемых функций f с нулевым средним значением $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ выполняются псевдокоммутационные соотношения

$$V W_0 f(t) = \frac{1}{2} W_0 V f(t), \qquad V W_1 f(t) = \frac{1}{2} W_1 V f(t). \tag{3.1}$$

В самом деле, ввиду нулевого среднего от f, функции $VW_i f$ и $W_i V f$, $i = 0, 1$, абсолютно непрерывны и обращаются в нуль в точках $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Производная $(W_i V f)'(t) = 2r^i(t) f(2t)$ совпадает с удвоенной производной $(VW_i f)'(t)$ в почти всех точках $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует (3.1) во всех точках $t \in \mathbb{R}$. Тогда в силу соотношений (3.1)

$$U^m r = \underbrace{4W_1 V \ldots 4W_1 V}_{m} r = 4^m 2^{1+\cdots+m} V^m W_1^m r = \varkappa_m V^m W_1^m r$$

в соответствии с выбором $\varkappa_m = 2^{m(m+5)/2}$. Осталось заметить, что $W_1^m r = \prod_{k=0}^m r_k$, так-что $U^m r = V^m \psi_m^{(m)} = \psi_m$ по определению (2.1) – (2.2) функций ψ_m.

Представление леммы 1 показывает, что $\psi_{m+1} = U\psi_m$, т.е. каждая следующая сплайн–функция является антипериодизацией интеграла от предыдущей. При этом "нулевая" функция $r = W_1 1$ также, очевидно, антипериодическая (здесь и далее 1 — функция, тождественно равная единице).

Далее, заметим, что каждая функция $f \in \mathcal{R}^d_{ch}$, т.е. представимая рядом по хаосам Радемахера порядка d, может быть записана в эквивалентном виде

$$f = \sum_{k_1,\ldots,k_d \geqslant 0} c_{k_1,\ldots,k_d} W_0^{k_1} W_1 \ldots W_0^{k_d} W_1 1, \qquad \sum_{k_1,\ldots,k_d \geqslant 0} |c_{k_1,\ldots,k_d}|^2 < \infty.$$

Действительно, не трудно видеть, что

$$r_{i_1}\dots r_{i_d}=W_0^{k_1}W_1\dots W_0^{k_d}W_1 1,\qquad k_1,\dots,k_d\geqslant 0,$$

где $i_1=k_1$, $i_2=k_1+k_2+1$, …, $i_d=k_1+\dots+k_d+d-1$.

Теперь докажем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $m=1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}W_0^kW_1 1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{2^{k+1}}. \tag{3.2}$$

Хорошо известно, что $\lambda(t)=1-2t$, $0<t<1$, — единственная с точностью до множителя непрерывная функция на $(0,1)$, представимая рядом по системе Радемахера (хаосу порядка $d=1$). Покажем, что

$$Ur=r-W_1^2\lambda. \tag{3.3}$$

Действительно, с одной стороны имеем

$$4Vr(t)=\begin{cases}4t, & 0\leqslant t\leqslant \frac12,\\ 4(1-t), & \frac12\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

С другой стороны

$$W_1\lambda(t)=\begin{cases}1-4t, & 0\leqslant t\leqslant \frac12,\\ 4t-3, & \frac12\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Поэтому $4Vr=1-W_1\lambda$. Действуя оператором W_1, получаем равенство (3.3). Видим, что функция $f_{1,1}=W_1^2\lambda$ принадлежит $\mathcal{R}^3_{ch}$.

Предположим, что представление леммы получено при некотором m. Действуя на него оператором U, с учетом леммы 1, находим

$$\psi_{m+1}=Ur-\sum_{s=1}^{m}Uf_{m,s}.$$

Поскольку $f_{m,s}\in\mathcal{R}^d_{ch}$ при $d=2s+1$, то ввиду соотношений (3.1) имеем

$$\begin{aligned}Uf_{m,s}&=\frac{1}{2^{d-1}}\sum_{k_1,\dots,k_d\geqslant 0}\frac{c_{k_1,\dots,k_d}}{2^{k_1+\dots+k_d}}W_1W_0^{k_1}\dots W_1W_0^{k_d}4Vr\\ &=\frac{1}{2^{d-1}}\sum_{k_1,\dots,k_{d-1}\geqslant 0}\frac{1}{2^{k_1+\dots+k_{d-1}}}\Bigl(\sum_{k_d\geqslant 0}\frac{c_{k_1,\dots,k_d}}{2^{k_d}}\Bigr)W_1W_0^{k_1}\dots W_1W_0^{k_{d-1}}r\\ &\quad-\frac{1}{2^{d-1}}\sum_{k_1,\dots,k_d\geqslant 0}\frac{c_{k_1,\dots,k_d}}{2^{k_1+\dots+k_d}}W_1W_0^{k_1}\dots W_1W_0^{k_d}W_1\lambda=g_{m,s}-h_{m,s+1}.\end{aligned}$$

Здесь учли, что $4Vr=1-W_1\lambda$ и $W_0^{k_d}1=1$. При этом $g_{m,s}\in\mathcal{R}^d_{ch}$ и $h_{m,s+1}\in\mathcal{R}^{d+2}_{ch}$. Таким образом

$$\psi_{m+1}=r-W_1^2\lambda-\sum_{s=1}^{m}(g_{m,s}-h_{m,s+1})=r-\sum_{s=1}^{m+1}f_{m+1,s},$$

где положили

$$f_{m+1,1} = g_{m,1} + W_1^2\lambda, \tag{3.4}$$

$$f_{m+1,s} = g_{m,s} - h_{m,s}, \qquad s = 2, \dots, m, \tag{3.5}$$

$$f_{m+1,m+1} = -h_{m,m+1}. \tag{3.6}$$

Осталось заметить, что $f_{m+1,s} \in \mathcal{R}_{ch}^d$ при $d = 2s+1$, $s = 1, \dots, m+1$.

Для дальнейшего изложения нам достаточно проследить динамику хаоса порядка $d = 3$ в представлении сплайна ψ_m.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$f_{m,1} = \gamma_m W_1^2 r + W_1^2\lambda, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma_m = \frac{2}{9}(1 - \frac{1}{4^{m-1}})$.

Доказательство. При $m = 1$ имеем $\gamma_1 = 0$ и равенство $f_{1,1} = W_1^2\lambda$ уже было получено при доказательстве теоремы 1. Пусть поэтому равенство для $f_{m,1}$ верно при некотором m, т.е.

$$f_{m,1} = W_1^2(\gamma_m + \tfrac{1}{2})r + W_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} W_0^k r.$$

Тогда согласно принятым при доказательстве теоремы 1 обозначениям, коэффициенты последнего разложения равны $c_{0,0,0} = \gamma_m + \frac{1}{2}$, $c_{0,0,k} = \frac{1}{2^{k+1}}$ при $k \geqslant 1$, остальные $c_{k_1,k_2,k_3} = 0$ при $k_1 \neq 0$ или $k_2 \neq 0$. Следовательно,

$$g_{m,1} = \frac{1}{4} \sum_{k_1,k_2 \geqslant 0} \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \left(\sum_{k_3 \geqslant 0} \frac{c_{k_1,k_2,k_3}}{2^{k_3}} \right) W_1 W_0^{k_1} W_1 W_0^{k_2} r,$$

где с учетом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{6}$ коэффициенты в скобках равны

$$\sum_{k_3 \geqslant 0} \frac{c_{k_1,k_2,k_3}}{2^{k_3}} = \begin{cases} \gamma_m + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, & k_1 = k_2 = 0, \\ 0, & k_1 + k_2 \neq 0. \end{cases}$$

Это означает, что

$$g_{m,1} = \frac{\gamma_m + \frac{2}{3}}{4} W_1^2 r$$

и в силу (3.4) получаем

$$f_{m+1,1} = \frac{\gamma_m + \frac{2}{3}}{4} W_1^2 r + W_1^2\lambda.$$

Осталось заметить, что решением рекуррентных соотношений

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_{m+1} = \frac{\gamma_m + \frac{2}{3}}{4}, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

является последовательность $\gamma_m = \frac{2}{9}(1 - \frac{1}{4^{m-1}})$, поскольку $\gamma = \frac{2}{9}$ — единственная неподвижная точка отображения $\gamma \mapsto \frac{\gamma + \frac{2}{3}}{4}$.

4. Простые спектры Уолша и ортогональность аффинных систем

Рассмотрим всевозможные произведения (некоммутирующих между собой) операторов двоичных сжатия–модуляции W_0, W_1:

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}, \qquad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k.$$

Поскольку

$$W^\alpha r(t) = r_k(t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t),$$

то семейство функций $\{W^\alpha r\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ (без начальной функции $w_0 = 1$). Взаимнооднозначное соответствие мультииндексов $\alpha \in \mathbb{A}$ и натуральных $n \in \mathbb{N}$, определяемое двоичным разложением $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$, задает нумерацию Пэли системы Уолша $\{W^\alpha r\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$.

Для произвольной 1-периодической функции f семейство $\{W^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ называется аффинной системой Уолша, порожденной функцией f (см. [9], [10]).

Аналогично, рассмотрим операторы сжатия–сдвига

$$S_0 = \frac{W_0 + W_1}{\sqrt{2}}, \qquad S_1 = \frac{W_0 - W_1}{\sqrt{2}}$$

и их всевозможные произведения

$$S^\alpha = S_{\alpha_0} \dots S_{\alpha_{k-1}}, \qquad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k.$$

Семейство функций $\{S^\alpha r\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ совпадает с системой Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ (без начальной функции $\chi_0 = 1$). Естественная нумерация системы Хаара определяется двоичным разложением вида $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{k-\nu} 2^{\nu-1}$.

Для произвольной 1-периодической функции f семейство $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ называется аффинной системой Хаара, порожденной функцией f, и как не трудно видеть, совпадает с системой сжатий и сдвигов функции $f\chi_{[0,1]}$ (без функции $f_0 = 1$).

Обозначим L_0^2 - множество всех 1-периодических функций $f \in L^2(0,1)$ с нулевым средним значением $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Определение 3. *Спектром Уолша функции $f \in L_0^2$ называется множество мультииндексов*

$$Spec_W(f) = \{\beta \in \mathbb{A} : (f, W^\beta r) \neq 0\}.$$

Пусть $\alpha\beta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-1})$ — конкатенация мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$.

Определение 4. *Скажем, что функция $f \in L_0^2$ имеет простой спектр Уолша, если из равенства $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, где $\alpha, \alpha' \in \mathbb{A}$ и $\beta, \beta' \in Spec_W(f)$, следует, что $\alpha = \alpha'$ (а тогда и $\beta = \beta'$).*

Лемма 3. *Если функция $f \in L_0^2$, $f \neq 0$, имеет простой спектр Уолша, то аффинные системы Уолша и Хаара $\{W^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$, $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ являются ортогональными.*

Доказательство. Начнем с тривиального замечания, что если спектры Уолша функций g и h непересекаются, то эти функции ортогональны: $(g,h)=0$. Далее рассмотрим ряд Фурье–Уолша функции $f\in L_0^2$

$$f=\sum_{\beta\in\mathrm{Spec}_W(f)}(f,W^\beta r)W^\beta r.$$

Отсюда

$$W^\alpha f=\sum_{\beta\in\mathrm{Spec}_W(f)}(f,W^\beta r)W^{\alpha\beta} r.$$

Поэтому

$$\mathrm{Spec}_W(W^\alpha f)=\{\alpha\beta\}_{\beta\in\mathrm{Spec}_W(f)}.$$

Тогда при $\alpha\neq\alpha'$ имеем $\mathrm{Spec}_W(W^\alpha f)\cap\mathrm{Spec}_W(W^{\alpha'}f)=\emptyset$, так как общая точка спектров имеет вид $\alpha\beta=\alpha'\beta'$, где $\alpha,\alpha'\in\mathbb{A}$ и $\beta,\beta'\in\mathrm{Spec}_W(f)$, и по определению простого спектра $\alpha=\alpha'$ вопреки предположению. Итак, $(W^\alpha f,W^{\alpha'}f)=0$ при $\alpha\neq\alpha'$. Поскольку $\|W^\alpha f\|=\|f\|>0$, то ортогональность системы $\{W^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ доказана. Система $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ также будет ортогональной вместе с $\{W^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$, ввиду того, что эти аффинные системы Хаара и Уолша связаны между собой посредством того же самого ортогонального преобразования, которое связывает классические системы Хаара и Уолша (в следующей формуле $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}$ — $2^k\times 2^k$-матрица Уолша):

$$S^\alpha f=\sum_{\beta\in\{0,1\}^k}\varepsilon_{\alpha\beta}W^\beta f,\qquad \alpha\in\{0,1\}^k,\qquad k=0,1,\dots.$$

5. Доказательство теоремы 2

Для каждой функции $f\in L_0^2$ определим преобразование T_f, переводящее систему Хаара (Уолша) в аффинную систему Хаара (Уолша), т.е.

$$T_fS^\alpha r=S^\alpha f,\qquad T_fW^\alpha r=W^\alpha f,\qquad \alpha\in\mathbb{A}.$$

По линейности преобразование T_f распространяется на линейное многообразие всех полиномов Хаара или, что то же самое, Уолша с нулевым средним значением. По определению, преобразование T_f коммутирует с операторами S_0,S_1 (эквивалентно, с операторами W_0,W_1). При этом T_f, вообще говоря, не является ограниченным оператором в L_0^2. Ясно, что в случае ортогональной аффинной системы $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ ($\{W^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$) имеем

$$\|T_fx\|=\|f\|\|x\|,\qquad x\in L_0^2,\tag{5.1}$$

т.е. в этом случае $\|T_f\|=\|f\|$. Условия ограниченности оператора T_f для функции f общего вида были получены в [8].

Прежде всего, покажем, что если f является антипериодизацией функции из $\mathcal{R}_{ch}^d$, т.е.

$$f=\sum_{k_1,\dots,k_d\geqslant 0}c_{k_1,\dots,k_d}W_1W_0^{k_1}\dots W_1W_0^{k_d}r$$

(при этом $f\in\mathcal{R}_{ch}^{d+1}$), то как раз имеем (5.1). В самом деле, спектр Уолша функции f удовлетворяет условию

$$\mathrm{Spec}_W(f)\subset\{(1,\mathbf{0}_{k_1},\dots,1,\mathbf{0}_{k_d})\}_{k_1,\dots,k_d\geqslant 0},$$

где $\mathbf{0}_k = (0,\dots,0)$, $k \geqslant 0$, — мультииндекс, состоящий из k нулей (при $k = 0$ — пустой мультииндекс). Поэтому функция f имеет простой спектр Уолша согласно определению 4. По лемме 3 аффинные системы Хаара и Уолша, порожденные функцией f, ортогональны. Таким образом, имеет место (5.1).

Из представления теоремы 1 следует операторное равенство

$$T_{\psi_m} = I - \sum_{s=1}^{m} T_{f_{m,s}}.$$

Поскольку вместе с ψ_m все функции $f_{m,s} \in \mathcal{R}_{ch}^{2s+1}$ антипериодические (это также видно из доказательства теоремы 1), то, как только что было показано, $\|T_{f_{m,s}}\| = \|f_{m,s}\|$. Следовательно,

$$\|I - T_{\psi_m}\| \leqslant \sum_{s=1}^{m} \|f_{m,s}\|, \qquad m = 1, 2, \dots.$$

Докажем, что для всех $m = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{m} \|f_{m,s}\| < \frac{9}{10}. \tag{5.2}$$

Начнем, используя лемму 2, с оценки для $f_{m,1} = \gamma_m W_1^2 r + W_1^2 \lambda$

$$\|f_{m,1}\| = \left((\gamma_m + \tfrac{1}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} \right)^{1/2} < \sqrt{\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}} = \frac{7}{9}.$$

Далее, в обозначениях доказательства теоремы 1, при $s = 2, \dots, m$ оценим

$$\begin{aligned}\|g_{m,s}\| &= \frac{1}{2^{d-1}} \left(\sum_{k_1,\dots,k_{d-1} \geqslant 0} \frac{1}{4^{k_1+\dots+k_{d-1}}} \left(\sum_{k_d \geqslant 0} \frac{c_{k_1,\dots,k_d}}{2^{k_d}} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{d-1}} \left(\frac{4}{3} \sum_{k_1,\dots,k_d \geqslant 0} c_{k_1,\dots,k_d}^2 \right)^{1/2} = \frac{2\|f_{m,s}\|}{4^s \sqrt{3}} \leqslant \frac{2\|f_{m,s}\|}{16\sqrt{3}},\end{aligned}$$

— учли, что $d = 2s + 1$. Равенство

$$h_{m,s+1} = \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{k_1,\dots,k_d \geqslant 0} \frac{c_{k_1,\dots,k_d}}{2^{k_1+\dots+k_d}} W_1 W_0^{k_1} \dots W_1 W_0^{k_d} W_1 \lambda$$

можно рассматривать как разложение функции $h_{m,s+1}$ в ряд по аффинной системе Уолша с образующей функцией $W_1\lambda$. Так как $\lambda \in \mathcal{R}_{ch}^1$, то эта система ортогональна и $\|W_1\lambda\| = \|\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому

$$\|h_{m,s+1}\| = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{3}} \left(\sum_{k_1,\dots,k_d \geqslant 0} \frac{c_{k_1,\dots,k_d}^2}{4^{k_1+\dots+k_d}} \right)^{1/2} \leqslant \frac{\|f_{m,s}\|}{4^s\sqrt{3}} \leqslant \frac{\|f_{m,s}\|}{16\sqrt{3}},$$

Наконец, еще требуется оценить норму функции $h_{m,2}$, возникающую при $s=1$. Для этого снова воспользуемся леммой 2, при доказательстве которой было отмечено, что $c_{0,0,0}=\gamma_m+\frac{1}{2}$, $c_{0,0,k}=\frac{1}{2^{k+1}}$ при $k\geqslant 1$, остальные $c_{k_1,k_2,k_3}=0$. Отсюда

$$h_{m,2}=\frac{1}{4}\sum_{k_1,k_2,k_3\geqslant 0}\frac{c_{k_1,k_2,k_3}}{2^{k_1+k_2+k_3}}W_1W_0^{k_1}W_1W_0^{k_2}W_1W_0^{k_3}W_1\lambda$$

$$=\frac{1}{4}\left(c_{0,0,0}W_1^4\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{0,0,k}}{2^k}W_1^3W_0^kW_1\lambda\right)$$

$$=\frac{1}{4}W_1^3\left((\gamma_m+\tfrac{1}{2})W_1\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}W_0^kW_1\lambda\right).$$

Поэтому

$$\|h_{m,2}\|=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left((\gamma_m+\tfrac{1}{2})^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2k+1}}\right)^{1/2}<\frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{60}}=a,$$

причем $a=\frac{\sqrt{218}}{36\sqrt{15}}<0,106$. Итак, в силу (3.5), (3.6) и установленных оценок, находим

$$\sum_{s=2}^{m+1}\|f_{m+1,s}\|\leqslant\|h_{m,2}\|+\sum_{s=2}^{m}(\|g_{m,s}\|+\|h_{m,s+1}\|)<a+\frac{\sqrt{3}}{16}\sum_{s=2}^{m}\|f_{m,s}\|.$$

Отсюда следует, что для всех m

$$\sum_{s=2}^{m}\|f_{m,s}\|<a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^n<\frac{0,106}{1-0,11}<0,12.$$

Окончательно будем иметь

$$\sum_{s=1}^{m}\|f_{m,s}\|<\frac{7}{9}+0,12<\frac{9}{10}.$$

Неравенство (5.2) доказано. Это означает, что $\|I-T_{\psi_m}\|<\frac{9}{10}$. Тогда оператор T_{ψ_m} является изоморфизмом L_0^2, т.е. сплайновая аффинная система $\{\psi_{m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса. Кроме того, имеем

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\chi_n-\psi_{m,n})\right\|\leqslant\frac{9}{10}\|c\|_{\ell^2},$$

откуда вытекает, что $A=\frac{1}{10}$, $B=\frac{19}{10}$ - универсальные границы Рисса сплайновых аффинных систем. Тем самым теорема 2 полностью доказана. □

В работе Гранадос [11] рассматривалась последовательность функций

$$\rho_m=\widetilde{U}^m1,\qquad m=1,2,\ldots,$$

где в отличие от оператора $U=4W_1V$ полагалось $\widetilde{U}=4VW_1$. В [11] было доказано, что аффинная система Уолша (названная там всплеском Уолша)

$$\rho_m(2^{k+1}t)w_n(t),\qquad k=0,1,\ldots,\qquad n=2^k,\ldots,2^{k+1}-1, \tag{5.3}$$

образует фрейм при $m=1$ и $m=2$.

Прямым следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

Следствие 1. *Для каждого $m \geqslant 3$ система функций (5.3) является базисом Рисса (после добавления к ней функции 1). Границы Рисса всех систем функций (5.3) могут быть выбраны независящими от m.*

Доказательство. Достаточно заметить, что система функций (5.3) совпадает с аффинной системой Уолша $\{W^\alpha \psi_m\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$, порожденной сплайном ψ_m.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2 изд., доп., Изд-во АФЦ, М., 1999.

[2] J.-O. Stromberg, “A modified Franklin system and higher order spline on $\mathbb{R}^n$ as unconditional basis for Hardy spaces”, *Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund*, vol. 2 (Chicago, 1981), W. Becker et al., Eds., Wadsworth, Belmont, CA, 1983, 475–494.

[3] G. Battle, “A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarier functions”, *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 601–615.

[4] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[5] С. В. Асташкин, “Функции Радемахера в симметричных пространствах”, *Функциональный анализ*, СМФН, **32**, РУДН, М., 2009, 3–161.

[6] С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов, “О множествах единственности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **26**:2 (1962), 211–222.

[7] Р. С. Суханов, “Хаосы Радемахера и многочлены Бернулли”, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012, № 3/1(94), 66–73.

[8] П. А. Терехин, “Аффинные базисы Рисса и дуальная функция”, *Матем. сб.*, **207**:9 (2016), 111–143.

[9] П. А. Терехин, “Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **14**:4(1) (2014), 395–400.

[10] С. В. Асташкин, П. А. Терехин, “Аффинные системы функций типа Уолша в симметричных пространствах”, *Матем. сб.*, (принято к печати).

[11] B. Granados, “Walsh wavelets”, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **13** (1992), 225–236.

С. Ф. Лукомский
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: `lukomskiisf@info.sgu.ru`

Поступило

Исправленный вариант

П. А. Терехин
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: `terekhinpa@mail.ru`

С. А. Чумаченко
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: `chumachenkosergei@gmail.com`