УДК 517.54

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАСАТЕЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ В ЭВОЛЮЦИИ ЛЕВНЕРА[1]

Д. В. Прохоров (Саратов и Петрозаводск, Россия)
ProkhorovDV@info.sgu.ru

Конформные отображения f верхней полуплоскости H на односвязную область G с локально связной границей непрерывно продолжаются вплоть до границы R полуплоскости H. Граница ∂G области G имеет угол раствора $\alpha\pi$, $0 \leq \alpha \leq 2$, в простом конце, соответствующем $x_0 \in R$, $f(x_0) \neq \infty$, если

$$\lim_{x\to x_0-} \arg(f(x) - f(x_0)) = \psi, \quad \lim_{x\to x_0+} \arg(f(x) - f(x_0)) = \psi + \alpha\pi, \quad x \in R,$$

см., например, [1, с.51].

При $\alpha = 0$ появляется так называемый касп с вершиной в точке $f(x_0)$. Конформное отображение H на G ведет себя локально как $(w - x_0)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 2$, в пересечении H с окрестностью точки x_0, если угол локально ограничен прямолинейными сегментами. Для угла с Дини гладкими границами Поммеренке [1, теорема 3.11] описал асимптотическое представление функции f, содержащее степени $w - x_0$ и логарифмические члены. Более сложное описание было предложено в случае $\alpha = 0$, когда граничные кривые каспа имеют взаимное касание первого порядка [1, с.266]. Варшавский в нескольких работах развил подход к изучению асимптотического поведения конформных отображений бесконечных полос, что соответствует каспу, см., например, [2]. Он получил геометрические достаточные условия, при которых $f(w) \sim (w-w_0)^\alpha$ в угле раствора $\alpha\pi$ [3]. Левай рассмотрел аналитические углы, ограниченные двумя аналитическими кривыми при $\alpha = 1$ [4], а Леман [5] распространил эти результаты на произвольные α, $0 < \alpha \leq 2$.

Уравнение Левнера демонстрирует большие возможности, в том числе в исследовании подобных задач. Пусть $\Gamma : [0, T] \to C$ является простой кривой на комплексной плоскости C, $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(0, T] \subset H$. Для заданного $t \in [0, T]$ существует единственное конформное отображение $g(\cdot, t) : H \setminus \Gamma(0, T] \to H$, имеющее гидродинамическую нормировку

$$g(z, t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Параметр t называется емкостью $\Gamma[0,t]$ относительно полуплоскости. Эволюция $g(z,\cdot)$ описывается дифференциальным уравнением Левнера

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{2}{g(z,t)-\lambda(t)}, \quad g(z,0)=z, \quad z \in H, \tag{1}$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией $\lambda(t) = g(\Gamma(t),t)$. Будем говорить, что g и Γ генерируются функцией λ. Обратная функция $f(w,t) = g^{-1}(w,t) : H \to H \setminus \Gamma[0,t]$ имеет свою гидродинамическую нормировку

$$f(w,t) = w - \frac{2t}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right), \quad w \to \infty.$$

Два отрезка $[\alpha(t),\lambda(t)] \subset R$ и $[\lambda(t),\beta(t)] \subset R$ отображаются функцией f на "левую" и "правую" стороны разреза $\Gamma[0,t]$, соответственно. Обе функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются сингулярными решениями уравнения (1). В аналитическом случае Левай в [4] и Леман в [5] установили асимптотическое разложение функции f в угле раствора π, согласно которому

$$f(w,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(w-\alpha(t))^{n+1}\log^m(w-\alpha(t)), \quad q_{00} \neq 0,$$

где w стремится к $\alpha(t)$ вдоль произвольных путей внутри верхней полуплоскости, включая граничные отрезки. Примененное обозначение $h(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n\chi_n(z)$ означает, что для любого натурального $N \geq 1$,

$$h(z) = \sum_{n=1}^{N} A_n\chi_n(z) + o(\chi_n(z)), \quad \frac{\chi_{n+1}(z)}{\chi_n(z)} \to 0,$$

при z стремящемся к 0 произвольно в замыкании $\overline{H}$ полуплоскости H.

Свойство 1. *Управляющая функция*

$$\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n t^{n/3}, \quad l_1 > 0, \ \ 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

обладает свойством 1, если она генерирует отображения $f(w,t)$ такие, что

$$f(\lambda(t),t) = q_{00}(\lambda(t)-\alpha(t)) + q_{11}(\lambda(t)-\alpha(t))^2\log(\lambda(t)-\alpha(t)) +$$
$$O((\lambda(t)-\alpha(t))^2), \quad t \to 0+.$$

Перейдем к рассмотрению асимптотического поведения отображения в окрестности другой сингулярной точки $\beta(t)$. Пусть функция $f(w,t)$

отображает $\beta(t)$ на вершину аналитического каспа с граничными линиями $[0,\epsilon] \subset R$, $\epsilon > 0$, и $\Gamma[0,t]$, которая имеет касание первого порядка с R в нуле. При таких условиях Поммеренке [1, с.266] показал, что

$$f(w,t) = -\frac{(\frac{\pi}{a} + o(1))}{\log(w-\beta(t))}, \quad a > 0, \quad w \to \beta(t), \quad w \in \overline{H}.$$

Подобная асимптотика установлена в [6] при некоторых условиях.

Свойство 2. *Управляющая функция (2) обладает свойством 2, если она генерирует отображения $f(w,t)$ такие, что*

$$\frac{1}{f(\lambda(t),t)} = \frac{1}{q_{00}(\lambda(t)-\alpha(t))} - \frac{q_{11}}{q_{00}^2}\log(\lambda(t)-\alpha(t)) - \frac{a\log(\lambda(t)-\beta(t))}{\pi} +$$
$$o(\log(\lambda(t)-\alpha(t))) + o(\log(\lambda(t)-\beta(t))), \quad t \to 0+\,.$$

Определение 1. *Управляющую функцию (2) будем называть допустимой, если она обладает свойствами 1 и 2.*

Теорема 1. *Пусть в дифференциальном уравнении Левнера (1) допустимая управляющая функция (2) генерирует аналитический разрез $\Gamma(0,T] \subset H \cup \{0\}$, который имеет касание первого порядка с R в нуле. Тогда существует $p_1 > 0$ такое, что*

$$\Gamma(t) = p_1 l_1 \sqrt[3]{t} + \frac{\kappa}{2\pi}(p_1 l_1 \sqrt[3]{t})^2(\log\sqrt[3]{t} + i\pi) + o(\sqrt[3]{t^2}), \quad t \to 0+,$$

где κ обозначает кривизну кривой Γ в точке 0.

Теорема 1 дает частичный ответ на некоторые открытые задачи [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pommerenke Ch.* Boundary Behaviour of Conformal Maps. Berlin : Springer-Verlag, 1992. 300 p.

2. *Warschawski S. E.* On conformal mapping of infinite strips // Trans. Amer. Math. Soc. 1942. V. 51. P. 280–335.

3. *Warschawski S. E.* Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung // Math. Z. 1932. V. 35. P. 321–456.

4. *Lewy H.* Developments at the confluence of analytic boundary conditions // Univ. California Publ. Math. 1950. V. 1, no. 7. P. 247–280.

5. *Lehman R. S.* Development of the mapping function at an analytic corner // Pacific J. Math. 1957. V. 7, no. 3. P. 1437–1449.

6. *Prokhorov D.* Conformal mapping asymptotics at a cusp // Rev. Mat. Complut. 2017. V. 30, no. 1. P. 79–89.

7. *Prokhorov D.* Harmonic measures of slit sides, Loewner-Kufarev evolution and extremum problems // In: Complex Analysis and Dynamical Systems. New Trends and Open Problems. M. Agranovsky, M. Golberg, F. Jacobzon, D. Shoikhet, L. Zalcman (Eds.). Series: Trends in Mathematics. Basel : Birkhäuser, 2017. 310 p.