УДК: 517.54

Гипотеза Бомбиери для конформных отображений круга

Д.В. Прохоров

prokhorovdv@info.sgu.ru; Саратовский государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Посвящается 70-летию со дня рождения Ф. Г. Авхадиева

Аннотация

Числа Бомбиери σ_{mn} характеризуют поведение тела коэффициентов для класса S всех голоморфных и однолистных в единичном круге функций f, нормированных разложением $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$. Число σ_{mn} вычисляется как предел отношения $\mathrm{Re}\,(n - a_n)$ и $\mathrm{Re}\,(m - a_m)$ при f, стремящемся к функции Кебе $K(z) = z(1-z)^{-2}$. В частности, $\sigma_{23=0}$. Мы определяем аналогичные числа $\sigma_{mn}(M)$ для класса $S(M) \subset S$ ограниченных функций $|f(z)| < M$, $|z| < 1$, $M > 1$, с пределом отношения $\mathrm{Re}\,(p_n(M) - a_n)$ и $\mathrm{Re}\,(p_m(M) - a_m)$ при f, стремящемся к функции Пика $P_M(z) = MK^{-1}(K(z)/M) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M)z^n$. Мы доказываем, что $\sigma_{23}(M) = -4/M$, $M > 1$. Это совместная работа с В. Г. Гордиенко.

Ключевые слова: однолистная функция, число Бомбиери, функция Кебе, функция Пика.

Пусть S обозначает класс всех голоморфных и однолистных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$
В течение долгой истории теории однолистных функций знаменитая функция Кебе
$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \in S$$
оказывалась экстремальной во многих задачах на классе S.

Э. Бомбиери [2] доказал локальную гипотезу Бибербаха об оценке $|a_n| \le n$, $n \ge 2$, в классе S и в той же статье поставил задачу найти числа, называемые сейчас числами Бомбиери,
$$\sigma_{mn} := \liminf_{a_m \to m} \frac{n - \mathrm{Re}\ a_n}{m - \mathrm{Re}\ a_m} = \liminf_{S \ni f \to K} \frac{n - \mathrm{Re}\ a_n}{m - \mathrm{Re}\ a_m}, \quad m, n \ge 2, \tag{1}$$
где f стремится к K локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Выполнив так называемые вещественные вариации в окрестности функции Кебе, Бомбиери выдвинул гипотезу, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$, где
$$B_{mn} := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{n \sin\theta - \sin(n\theta)}{m \sin\theta - \sin(m\theta)},$$
и доказал, что $\sigma_{mn} \le B_{mn}$ для $m = 3$ и нечетных n, см. также результаты в [4] и [5]. Бшути и Хенгартнер [5] доказали гипотезу Бомбиери в классе S_R функций $f \in S$ с вещественными коэффициентами своего тейлоровского разложения. Поскольку согласно локальной

гипотезе Бибербаха, доказанной Бомбиери в [2], и доказательству де Бранжа [3] глобальной гипотезы Бибербаха, $B_{mn} \geq 0$ и $\sigma_{mn} \geq 0$, и из результатов [5] следует, что $\sigma_{mn} = 0$ при условии, что $B_{mn} = 0$. Действительно, в этом случае

$$\sigma_{mn} = \liminf_{S \ni f \to K} \frac{n - \text{Re } a_n}{m - \text{Re } a_m} \leq \liminf_{S_R \ni f \to K} \frac{n - \text{Re } a_n}{m - \text{Re } a_m} = B_{mn} = 0.$$

В частности, $\sigma_{23} = B_{23} = 0$, что может быть установлено непосредственно.

Гипотеза Бомбиери во всем классе S была опровергнута Грайнером и Ротом в [8] для $n = 2$ и $m = 3$. Они показали, что

$$\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} < \frac{1}{4} = B_{32}.$$

В продолжение этого результата было показано в [10], что

$$\sigma_{42} = 0.050057... < B_{42} = 0.1, \quad \sigma_{24} = 0.969556... < B_{24} = 1,$$

$$\sigma_{34} = 0.791557... < B_{34} = 0.828427... \,.$$

Нахождение чисел Бомбиери σ_{mn} сводится к оценке линейных функционалов на классе S, см., например, [8] и [10]. А именно,

$$\sigma_{mn} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}\},$$

где верхняя грань берется по множеству всех чисел λ, для которых локальный максимум функционала $\text{Re}(a_n - \lambda a_m)$ в классе S доставляется функцией Кебе $K(z)$.

Недавно появилась серия работ, см. [1], [6], [7], свидетельствующие о возвращении интереса к гипотезе Бомбиери. В отличие от Бомбиери, Леюнг произвел так называемую комплексную вариацию в окрестности функции Кебе и получил вариационные формулы, на основании которых Ефраимидис выписал целое множество парных индексов $\{mn\}$ таких, что $\sigma_{mn} < B_{mn}$. В работе [10] числа Бомбиери вычислялись методом оптимального управления, теоретически позволяющим найти любое число Бомбиери. Однако с ростом индексов m и n объем вычислений нарастал столь стремительно, что довести их до конца становилось нереально. С другой стороны, Леюнг получил вариационные формулы, которые предоставляли относительно простые достаточные условия для фиксации в некоторых случаях нарушения справедливости гипотезы Бомбиери.

Аaронов и Бшути в [1] развивают идет Бомбиери [2] о том, что четные и нечетные коэффициенты имеют различную асимптотику при $|a_2| \to 2$, что отражается в равенстве Бомбиери

$$\liminf_{a_2 \to 2} \frac{3 - \text{Re}\, a_3}{\sqrt{(2 - \text{Re}\, a_3)^3}} = \frac{8}{3}.$$

Ааронов и Бшути доказали, что для функций $f \in S$ и для всякого $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{2m - |a_{2m}|}{2 - |a_2|} \geq \frac{3m}{2(4m^2 - 1)},$$

$$\frac{2m + 1 - |a_{2m+1}|}{\sqrt{(2 - |a_2|)^3}} \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{15m(m+1)}{(4m^2 - 1)(2m + 3)}.$$

Вычисление чисел Бомбиери интересно, помимо прочего, потому, что они характеризуют строение границы тела коэффициентов

$$V_n := \{(a_2, \ldots, a_n) : f \in S\}, \ \ n \geq 2,$$

для класса S в окрестности точки $k_n := (2, \dots, n) \in V_n$, доставляемой функцией Кебе. Точка k_n является угловой точкой множества V_n в том смысле, что существует семейство опорных гиперплоскостей к множеству V_n, проходящих через точку k_n. Известно, см., например, [11], что существует, по крайней мере, $(n-1)$-мерное множество опорных гиперплоскостей для $(2n-2)$-мерного множества V_n, проходящих через точку k_n, а именно, гиперплоскости с нормальными векторами $\Lambda_n = (0, \dots, 0, 1)$ и $\Lambda_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$ с единицей на $(s-1)$-м месте, $s < n$. Числа Бомбиери локально характеризуют это множество опорных гиперплоскостей.

Известно, что подмножество ограниченных функций класса S устроено заметно сложнее, чем весь класс S. Обозначим через $S(M)$, $M > 1$, подкласс функций из S, состоящий из ограниченных функций, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$ в $\mathbb{D}$, $S(\infty) = S$. Подобно той роли, которую в экстремальных задачах на классе S играет функция Кебе, функция Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n$$

оказывается экстремальной в оценке многих функционалов на классе $S(M)$. Напомним, в частности, что

$$p_2(M) = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right), \quad p_3(M) = 5\left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right).$$

Хотя $P_n(M) := (p_2(M), \dots, p_n(M))$ тоже является угловой точкой тела коэффициентов

$$V_n(M) := \{(a_2, \dots, a_n) : f \in S(M)\}, \quad n \geq 2,$$

для класса $S(M)$, но множество опорных гиперплоскостей к $V_n(M)$, проходящих через точку $P_n(M)$, имеет меньшую размерность, чем в случае точки $k_n \in V_n$. Таким образом, имеется очевидный интерес в исследовании чисел для класса $S(M)$, аналогичных числам Бомбиери в классе S.

По аналогии с формулой (1), определяющей числа Бомбиери σ_{mn}, зададим схожей формулой подобные числа, которые характеризуют тело коэффициентов $V_n(M)$ в окрестности "точки Пика". Так, для $M > 1$, положим

$$\sigma_{mn}(M) := \liminf_{S(M) \ni f \to P_M} \frac{p_n(M) - \operatorname{Re} a_n}{p_m(M) - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \geq 2,$$

где f стремится к P_M локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Числа $\sigma_{mn}(M)$ определены корректно лишь в том случае, когда функция Пика P_M доставляет локальный максимум значению $\operatorname{Re} a_m$ в классе $S(M)$. Это условие выполняется, например, если m четное и число M превосходит некоторую величину, зависящую от m, см. [9].

Интересно понять, как будет меняться значение $\sigma_{mn}(M)$ для пары (mn), когда $\sigma_{mn} = \sigma_{mn}(\infty) = 0$. В настоящей работе внимание сосредоточено на величине $\sigma_{23}(M)$, которая определена корректно, так как $|a_2| \leq p_2(M)$ в классе $S(M)$ со знаком равенства только для функции Пика P_M. Основной результат приведен в следующей теореме.

Теорема. *Для всех M, $1 < M \leq \infty$ справедливо равенство*

$$\sigma_{23}(M) = -\frac{4}{M}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Список литературы

[1] Aharonov D., Bshouty D. *A problem of Bombieri on univalent functions* // Comput. Methods Funct. Theory – 2016. – V. 16. – № 4. – P. 677–688.

[2] Bombieri E. *On the local maximum property of the Koebe function* // Invent. Math. – 1967. – V. 4. – P. 26–67.

[3] Branges L. de. *A proof of the Bieberbach conjecture* // Acta Math. – 1985. – V. 154. – № 1-2. – P. 137–152.

[4] Bshouty D., Hengartner W. *Local behavior of coefficients in subclasses of S* // Contemp. Math. – 1985. – V. 38. – P. 77–84. (1985).

[5] Bshouty D., Hengartner W. *A variation of the Koebe mapping in a dense subset of S* // Canad. J. Math. – 1987. – V. 39. – № 1. – P. 54–73.

[6] Efraimidis I. On the failure of Bombieri's conjecture for univalent functions // ArXiv:1612.07242v2[math.CV]. –2016.

[7] Leung Yuk-J. *On the Bombieri numbers for the class S* // J. Anal. – 2016. – V. 24. – № 2. – P. 229–250.

[8] Greiner R., Roth O. *On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 129. – № 12. – P. 3657–3664 (2001).

[9] Prokhorov D. *Even coefficient estimates for bounded univalent functions* // Ann. Polon. Math. – 1993. – V. 58. – № 3. – P. 267–273.

[10] Prokhorov D., Vasil'ev A. *Optimal control in Bombieri's and Tammi's conjectures* // Georgian Math. J. – 2005. – V. 12. – № 4. – P. 743–761.

[11] Schaeffer A. C., Spencer D. C. *Coefficient regions for schlicht functions.* – Providence, RI: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – V. 35, 1950. – 311 p.

The Bombieri conjecture for conformal mappings from the disk

D.V. Prokhorov

Abstract

Bombieri's numbers σ_{mn} characterize the behavior of the coefficient body for the class S of all holomorphic and univalent functions f in the unit disk normalized by $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. The number σ_{mn} is the limit of ratio for $\mathrm{Re}\,(n - a_n)$ and $\mathrm{Re}\,(m - a_m)$ as f tends to the Koebe function $K(z) = z(1-z)^{-2}$. In particular, $\sigma_{23=0}$. We define analogous numbers $\sigma_{mn}(M)$ for the class $S(M) \subset S$ of bounded functions $|f(z)| < M$, $|z| < 1$, $M > 1$, with the limit of ratio for $\mathrm{Re}\,(p_n(M) - a_n)$ and $\mathrm{Re}\,(p_m(M) - a_m)$ as f tends to the Pick function $P_M(z) = MK^{-1}(K(z)/M) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n$. We prove that $\sigma_{23}(M) = -4/M$, $M > 1$. This is a joint work with V. G. Gordienko.

Keywords: univalent function, the Bombieri number, the Koebe function, the Pick function.