О. А. Королева, Теорема равносходимости для интегрального оператора с кусочно-постоянным ядром, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018, том 22, номер 1, 184–197

DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1583

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 1. С. 184–197
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1583

Краткие сообщения

УДК 517.984.62

Теорема равносходимости для интегрального оператора с кусочно-постоянным ядром

О. А. Королева

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (национальный исследовательский университет),
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

Аннотация

Работа посвящена теореме равносходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям одного интегрального оператора A, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Рассматривается эквивалентный ему интегральный оператор в пространстве вектор-функций размерности 4. Этот оператор замечателен тем, что компоненты его ядра терпят разрывы лишь на линии $t = x$. Находятся необходимые и достаточные условия для обращения оператора A. Это условие есть отличие от нуля одного определителя четвертого порядка. Изучается резольвента Фредгольма оператора A. Найдена формула для резольвенты. Ее нахождение сводится к решению краевой задачи для дифференциальной системы первого порядка в пространстве вектор-функций размерности четыре. Проводится преобразование этой краевой задачи, которое помогает справиться с трудностями, возникающими при ее решении. Получены также условия, аналогичные условиям регулярности по Биркгофу. Они связаны с отличием от нуля некоторых легко считаемых определителей четвертого порядка. При выполнении этих условий имеет место некоторая оценка для определителя, нули которого являются собственными значениями рассматриваемой краевой задачи. Приводится теорема равносходимости для оператора A. Основной метод, применяемый при доказательстве теоремы, — метод Коши–Пуанкаре интегрирования резольвенты изучаемого оператора по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. В работе также приведен пример интегрального оператора с кусочно-постоянным ядром, которое удовлетворяет всем требованиям, полученным в ходе работы.

Ключевые слова: резольвента, собственные и присоединенные функции, теорема равносходимости.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Королева О. А. Теорема равносходимости для интегрального оператора с кусочно-постоянным ядром // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 184–197. doi: 10.14498/vsgtu1583.

Сведения об авторе

Ольга Артуровна Королева http://orcid.org/0000-0001-9692-5646
старший преподаватель; каф. компьютерной алгебры и теории чисел;
e-mail: korolevaoart@yandex.ru

Получение: 26 ноября 2017 г. / Исправление: 12 февраля 2018 г. / Принятие: 12 марта 2018 г. / Публикация онлайн: 29 марта 2018 г.

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Впервые теоремы равносходимости были получены в работах В. А. Стеклова [1], Е. Гобсона [2], А. Хаара [3] для дифференциального оператора Штурма—Лиувилля. Затем Я. Д. Тамаркиным [4], М. Стоуном [5] были распространены на дифференциальный оператор произвольного порядка

$$l[y] = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}, \quad p_k(x) \in C[0,1], \tag{1}$$

с произвольными краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \big[a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1)\big] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

которые удовлетворяют условиям регулярности Биркгофа [6, с. 66–67]. Оператор (1), (2) для произвольного n в 1908 исследовал Дж. Биркгоф [7, 8].

Теорема равносходимости для интегрального оператора была получена А. П. Хромовым [9]. Он рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра имеют разрыв 1-го рода на линии $t = x$. Затем он исследовал новый класс интегральных операторов, когда это свойство ядер наблюдается на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. Одним из таких операторов является оператор

$$Af(x) \equiv \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)\, dt + \alpha \int_0^x A(x,t) f(t)\, dt,$$

где $x \in [0,1]$, а ядро $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ и

$$\frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{n-1,j} \quad s, j = \overline{0, n},$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, α — произвольное комплексное число, $\alpha^2 \neq 1$.

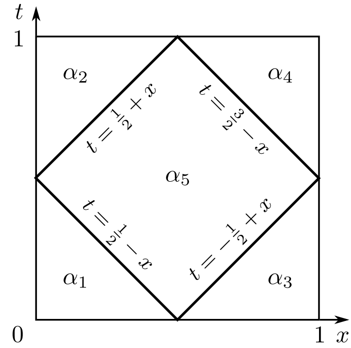
В настоящей работе исследуется равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора

$$y(x) = Af(x) \equiv \int_0^1 A(x,t)\, f(t) dt \tag{3}$$

с ядром

$$A(x,t) = \begin{cases} \alpha_1, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} - x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ \alpha_2, & \frac{1}{2} + x \leqslant t \leqslant 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ \alpha_3, & 0 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{2} + x, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \alpha_4, & \frac{3}{2} - x \leqslant t \leqslant 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \alpha_5, & \frac{1}{2} - x \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ \alpha_5, & -\frac{1}{2} + x \leqslant t \leqslant \frac{3}{2} - x, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

которое терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат (см. рисунок). Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ — произвольные комплексные числа. В пространстве вектор-функций размерности 4 рассмотрим эквивалентный ему интегральный оператор:



$$z(x) = Bg(x) \equiv \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad (4)$$

где

$$z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^\top, \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^\top, \quad (5)$$

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x, \frac{1}{2}-t) & A(x, \frac{1}{2}+t) & 0 \\ A(\frac{1}{2}-x, t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}-x, 1-t) \\ A(\frac{1}{2}+x, t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}+x, 1-t) \\ 0 & A(1-x, \frac{1}{2}-t) & A(1-x, \frac{1}{2}+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемых операторов A и B, определяемых формулами (3), (4), справедлива

Теорема 1. *Если $y(x) = Af(x)$, то $z(x) = Bg(x)$, причем*

$$z(x) = \big(y(x), y(\tfrac{1}{2}-x), y(\tfrac{1}{2}+x), y(1-x)\big)^\top,$$
$$g(x) = \big(f(x), f(\tfrac{1}{2}-x), f(\tfrac{1}{2}+x), f(1-x)\big)^\top.$$

Если $z(x) = Bg(x)$, где $z(x)$, $g(x)$ определены как (5) и $g_1(x) = g_2(\frac{1}{2}-x)$, а $g_3(x) = g_4(\frac{1}{2}-x)$, то $z_1(x) = z_2(\frac{1}{2}-x)$, $z_3(x) = z_4(\frac{1}{2}-x)$ и $y(x) = Af(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g_3(-\frac{1}{2}+x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases} \qquad y(x) = \begin{cases} z_1(x), & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ z_3(-\frac{1}{2}+x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Доказательство. Представим оператор (3) в виде суммы:

$$y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A(x,t)f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 A(x,t)f(t)\,dt. \quad (6)$$

Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. В первом интеграле из (6) сделаем замену $t = \frac{1}{2} - \xi$, во втором $t = \xi + \frac{1}{2}$. Затем переобозначим $\xi = t$ и получим

$$y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A(x, \tfrac{1}{2}-t)f(\tfrac{1}{2}-t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A(x, \tfrac{1}{2}+t)f(\tfrac{1}{2}+t)\,dt. \quad (7)$$

Здесь ядра в обоих интегралах имеют разрыв на линии $x = t$. Положим в (7) $\frac{1}{2} - x$ вместо x и в обоих интегралах выполним замены $t = \frac{1}{2} - \xi$, затем переобозначим $\xi = t$, чтобы опять разрывы ядер были на линии $x = t$:

$$y(\tfrac{1}{2}-x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A(\tfrac{1}{2}-x, t)f(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A(\tfrac{1}{2}-x, 1-t)f(1-t)\,dt. \quad (8)$$

Пусть теперь $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тогда положим в (6) $\frac{1}{2}+x$, вместо x (т. е. опять получаем, что $x \in [0, \frac{1}{2}]$) и во втором интеграле сделаем замену $t = 1-\xi$, $\xi = t$, то есть добьемся, что разрывы ядер в интегралах опять будут на линии $x = t$:

$$y(\tfrac{1}{2}+x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A(\tfrac{1}{2}+x, t) f(t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A(\tfrac{1}{2}+x, 1-t) f(1-t)\,dt. \tag{9}$$

Наконец, в (6) положим $x = \frac{1}{2} - \eta$ и $t = \frac{1}{2} - \xi$, затем $\eta = x$, $\xi = t$:

$$y(1-x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A(1-x, \tfrac{1}{2}-t) f(\tfrac{1}{2}-t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A(1-x, \tfrac{1}{2}+t) f(\tfrac{1}{2}+t)\,dt. \tag{10}$$

Записывая (7)–(10) в матричном виде, убеждаемся в справедливости теоремы. $\square$

Замечание. Представление (4) может быть получено неоднозначно. Но в нашем случае элементы матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

Следующая теорема дает условие существования обратного оператора B^{-1}.

Теорема 2. *Оператор B обратим тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\det Q = ad - cb \neq 0, \tag{11}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -c & 0 & 0 & -d \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix},$$

$$a = \alpha_5 - \alpha_1, \quad b = \alpha_5 - \alpha_2, \quad c = \alpha_5 - \alpha_3, \quad d = \alpha_5 - \alpha_4, \tag{12}$$

a, b, c, d — постоянные.

Доказательство. Рассмотрим однородное уравнение $Bg(x) = 0$, где $g(x) = \big(f(x), f(\frac{1}{2}-x), f(\frac{1}{2}+x), f(1-x)\big)^\top$. Выясним, при каких условиях оно имеет только нулевое решение. Запишем уравнение

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t) g(t)\,dt = 0$$

в виде

$$\int_0^x B(x,t) g(t)\,dt + \int_x^{\frac{1}{2}} B(x,t) g(t)\,dt = 0.$$

Из определения $A(x,t)$ и $B(x,t)$ имеем

$$\int_0^x \begin{pmatrix} 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \end{pmatrix} g(t)\,dt + \int_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix} g(t)\,dt = 0.$$

Продифференцируем это равенство по x:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\frac{1}{2}-x) \\ f(\frac{1}{2}+x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\frac{1}{2}-x) \\ f(\frac{1}{2}+x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_5-\alpha_1 & \alpha_5-\alpha_2 & 0 \\ \alpha_1-\alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_5 \\ \alpha_3-\alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_4-\alpha_5 \\ 0 & \alpha_5-\alpha_3 & \alpha_5-\alpha_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\frac{1}{2}-x) \\ f(\frac{1}{2}+x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} = 0.$$

Переходя к обозначениям (12), получаем, что для обратимости оператора B необходимо и достаточно, чтобы матрица Q была невырождена:

$$\det Q = ad - cb \neq 0. \qquad \square$$

Условие (11) для существования обратного оператора легко проверяется, в отличие от условий, которые получены в [10, 12]. Оно сразу дает вид обратного оператора B^{-1}:

$$B^{-1}z(x) = Q^{-1}z'(x) \tag{13}$$

Рассмотрим резольвенту $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ оператора A.

Теорема 3. *Если R_λ существует, то*

$$R_\lambda f(x) = v(x) \tag{14}$$

и выполняется условие

$$\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \neq 0. \tag{15}$$

Здесь

$$v(x) = \begin{cases} z_1(x), & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ z_3(x-\frac{1}{2}), & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

$z_1(x)$, $z_3(x)$ — *первая и третья компоненты вектора* $z(x)$, *удовлетворяющего краевой задаче*

$$z'(x) = Q\lambda z(x) + Qg(x), \tag{16}$$

$$Sz(0) + Tz(\tfrac{1}{2}) = 0, \tag{17}$$

где

$$z(x) = \big(y(x), y(\tfrac{1}{2}-x), y(\tfrac{1}{2}+x), y(1-x)\big)^\top,$$

$$g(x) = \big(f(x), f(\tfrac{1}{2}-x), f(\tfrac{1}{2}+x), f(1-x)\big)^\top,$$

$$S = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_5\alpha_4 - \alpha_5\alpha_3}{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_5\alpha_1 - \alpha_5\alpha_2}{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}. \tag{18}$$

Доказательство. Если $y(x) = R_\lambda\big(Af(x)\big) = (E - \lambda A)^{-1}Af(x)$, то $y(x) = A\big(\lambda y(x) + f(x)\big)$. Тогда по теореме 1 имеем $z(x) = B\big(\lambda z(x) + g(x)\big)$, т. е. $z(x) = (E - \lambda B)^{-1}Bg(x)$. Значит, $(E - \lambda B)z(x) = Bg(x)$, $z(x) - \lambda Bz(x) = Bg(x)$. Следовательно,

$$z(x) = \lambda Bz(x) + Bg(x). \tag{19}$$

Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Продифференцируем равенство (19):

$$z'(x) = \lambda Qz(x) + Qg(x).$$

Таким образом, при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ получили $R_\lambda f(x) = v(x) = z_1(x)$, где $z_1(x)$ — первая компонента вектора

$$z(x) = \big(z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x)\big)^\top = \big(y(x), y(\tfrac{1}{2} - x), y(\tfrac{1}{2} + x), y(1 - x)\big)^\top. \tag{20}$$

Пусть $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Из (20) $z_3(x) = y(\frac{1}{2} + x)$. Сделаем замену $x = \xi - \frac{1}{2}$. Тогда $\xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Переобозначим $\xi = x$. Получаем $z_3(x - \frac{1}{2}) = y(x)$. Таким образом, выполнение уравнения (16) доказано.

Покажем, что выполняется условие (17). Используя представление (4), получим

$$y(0) = \alpha_1 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \alpha_2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt, \quad y(\tfrac{1}{2} - 0) = \alpha_5 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \alpha_5 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt,$$

$$y(\tfrac{1}{2} + 0) = \alpha_5 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \alpha_5 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt, \quad y(1) = \alpha_3 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \alpha_4 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt.$$

Эти равенства в обозначениях

$$N_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt, \quad N_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt$$

можно переписать следующим образом:

$$y(0) = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2; \tag{21}$$

$$y(\tfrac{1}{2}) = y(\tfrac{1}{2} - 0) = y(\tfrac{1}{2} + 0) = \alpha_5 N_1 + \alpha_5 N_2; \tag{22}$$

$$y(1) = \alpha_3 N_1 + \alpha_4 N_2. \tag{23}$$

Решим (21), (23) как систему линейных уравнений и подставим найденное решение в (22):

$$y(\tfrac{1}{2}) = y(0)\frac{\alpha_5\alpha_4 - \alpha_5\alpha_3}{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3} + y(1)\frac{\alpha_5\alpha_1 - \alpha_5\alpha_2}{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}.$$

Потребуем, чтобы $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \neq 0$. В обозначениях (18) краевые условия выглядят следующим образом:

$$y(\tfrac{1}{2} - 0) = y(\tfrac{1}{2} + 0), \quad y(\tfrac{1}{2}) = \beta_1 y(0) + \beta_2 y(1).$$

Запишем их в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(\frac{1}{2} - 0) \\ y(\frac{1}{2} + 0) \\ y(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(\frac{1}{2} - 0) \\ y(\frac{1}{2} + 0) \\ y(1) \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, условие (17) выполнено и теорема доказана. □

Теорема 4. *Если λ таково, что однородная краевая задача для* (16), (17) *имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле* (14).

Доказательство. По условию, однородная задача для (16), (17) имеет только тривиальное решение. То есть уравнение $z'(x) = Q\lambda z(x)$ имеет только тривиальное решение. По формуле (13) имеем, что тривиальное решение имеет уравнение $z(x) = \lambda Bz(x)$. Значит, по теореме Фредгольма существует и притом единственное решение уравнения $z(x) = \lambda Bz(x) + Bg(x)$. Следовательно, существует $R_\lambda B$, а значит, существует $R_\lambda A$ по теореме 1. То есть $z_1(x) = R_\lambda\big(Af(x)\big)$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Так как $z_3(x) = z_1(\frac{1}{2} + x)$, заменяем $x = \xi - \frac{1}{2}$, где уже $\xi \in [\frac{1}{2}, 1]$, $z_3(\xi - \frac{1}{2}) = z_1(\xi) = R_\lambda\big(Af(\xi)\big)$ при $\xi \in [\frac{1}{2}, 1]$. Переобозначим $\xi = x$. Теорема доказана. □

Минимальный многочлен матрицы Q совпадает с характеристическим многочленом:

$$\lambda^4 - \lambda^2(d^2 + 2bc + a^2) + (ad - bc)^2.$$

Значит, имеет место

Лемма 1. *При условиях:*

$$d + a \neq 0, \quad (a - d)^2 + 4bc \neq 0, \tag{24}$$

матрица Q подобна диагональной $D = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причем $\omega_3 = -\omega_2$, $\omega_4 = -\omega_1$, $\omega_1 \neq \omega_2 \neq 0$.

Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}Q\Gamma = D$. Выполним в (16), (17) замену $z = \Gamma h$. Тогда

$$h'(x) = \lambda Dh(x) + m_1(x), \tag{25}$$

$$U(h) = S\Gamma h(0) + T\Gamma h(\tfrac{1}{2}) = 0, \tag{26}$$

где $m_1(x) = \Gamma^{-1}Dm(x)$.

Проведем необходимое исследование краевой задачи (25), (26). За счет выбора ω_1 и ω_2 можем считать, что

$$\operatorname{Re}\lambda\omega_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda\omega_2 \geqslant 0.$$

Согласно [10], имеет место

Лемма 2. *Решение задачи (25), (26) имеет представление в виде*

$$h(x,\lambda) = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m_1(t)\,dt + g_\lambda m_1(x), \tag{27}$$

где $Y(x,\lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda\omega_1 x},\ldots,e^{\lambda\omega_4 x})$, $\Delta(\lambda) = U\big(Y(x,\lambda)\big)$; U_x *означает, что* U *применяется по* x; $g(x,t,\lambda) = \operatorname{diag}\big(g_1(x,t,\lambda),\ldots,g_4(x,t,\lambda)\big)$,

$$g_i(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \operatorname{Re}\lambda\omega_i \geqslant 0,\\ \ \ \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \operatorname{Re}\lambda\omega_i \leqslant 0,\end{cases} \qquad \varepsilon(x,t) = \begin{cases}1, & t\leqslant x,\\ 0, & t > x;\end{cases}$$

$$g_\lambda m_1(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m_1(t)\,dt.$$

Рассмотрим подробно $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Gamma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix}1 & 0 & -\beta_2 & 0\\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Gamma\begin{pmatrix}e^{\mu\omega_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\mu\omega_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\mu\omega_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu\omega_4}\end{pmatrix},$$

где $\mu = \frac{\lambda}{2}$.

Обозначим элементы матрицы Γ через γ_{ij} и выпишем элементы матрицы $\Delta(\lambda)$ построчно:

$$\begin{aligned}\Delta_{1j} &= -\beta_1\gamma_{1j} + (\gamma_{1j} - \beta_2\gamma_{3j})e^{\mu\omega_j},\\ \Delta_{2j} &= \gamma_{2j} - \beta_2\gamma_{4j} - \beta_1\gamma_{2j}e^{\mu\omega_j},\\ \Delta_{3j} &= -\gamma_{2j} + \gamma_{1j}e^{\mu\omega_j},\\ \Delta_{4j} &= \gamma_{3j} - \gamma_{4j}e^{\mu\omega_j}, \quad j = 1,2,3,4.\end{aligned}$$

Используя свойство аддитивности определителя, вычислим $\det\Delta(\lambda)$. Зафиксируем $\arg\lambda$. Коэффициенты при старшей и младшей степенях экспоненты обозначим через P_1 и P_0:

$$P_1 = \det\begin{pmatrix}\gamma_{11}-\beta_2\gamma_{31} & \gamma_{12}-\beta_2\gamma_{32} & -\beta_1\gamma_{13} & -\beta_1\gamma_{14}\\ -\beta_1\gamma_{21} & -\beta_1\gamma_{22} & \gamma_{23}-\beta_2\gamma_{43} & \gamma_{24}-\beta_2\gamma_{44}\\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24}\\ -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & \gamma_{33} & \gamma_{34}\end{pmatrix},$$

$$P_0 = \det \begin{pmatrix} -\beta_1\gamma_{11} & -\beta_1\gamma_{12} & \gamma_{13}-\beta_2\gamma_{33} & \gamma_{14}-\beta_2\gamma_{34} \\ \gamma_{21}-\beta_2\gamma_{41} & \gamma_{22}-\beta_2\gamma_{42} & -\beta_1\gamma_{23} & -\beta_1\gamma_{24} \\ -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & -\gamma_{13} & -\gamma_{14} \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие (условие регулярности):

$$P_1 P_0 \neq 0. \tag{28}$$

Условие (28) для данного класса операторов является легко проверяемым, в отличие от условия в [12]. Нули $\det\Delta(\lambda)$ являются собственными значениями краевой задачи (25), (26) и при больших $|\lambda|$ находятся в полосах, границы которых параллельны некоторым лучам, исходящим из точки $\lambda = 0$, причем в каждой полосе в любом прямоугольнике единичной длины число нулей $\det\Delta(\lambda)$ ограничено числом, не зависящем от прямоугольника. Тогда известно [11, гл. 3, § 1, лемма 1], что если удалить все собственные значения вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ, то в получившейся области S_δ справедлива оценка

$$|\det\Delta(\lambda)| \geqslant c\left|e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}\right|, \tag{29}$$

где константа $c > 0$ и зависит только от δ.

Очевидна следующая лемма.

Лемма 3. *В области S_δ при больших λ для решения $h(x,\lambda)$ задачи (25), (26), задаваемого формулой (27), имеют место следующие оценки:*

$$\|g_\lambda m_1(x)\|_\infty = O\big(\|f\|_1\big), \quad \|g_\lambda \chi(x)\|_\infty = O\big(\tfrac{1}{\lambda}\big), \tag{30}$$

где компоненты вектор-функции $\chi(x)$ являются характеристическими функциями отрезков из $[0,\frac{1}{2}]$; $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ — нормы в пространстве вектор-функций $L_\infty[0,\frac{1}{2}]$, $L[0,\frac{1}{2}]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$u'(x) = \lambda D u(x) + m_1(x),$$
$$U_0(u) = u(0) - u(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Для ее решения $u(x,\lambda)$ используем формулу (27), где Δ, U заменяются на Δ_0, U_0, и оценки (29). Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями δ нули $\det\Delta_0(\lambda)$. Получим новую область, которую опять обозначим за S_δ. Тогда в S_δ выполняется

Лемма 4. *Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int_{|\lambda|=r}\big[h(x,\lambda) - u(x,\lambda)\big]\,d\lambda\right\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]}$ — норма в $C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,\frac{1}{4})$.

Это утверждение устанавливается с помощью оценок (29), (30).

2. Основной результат. Сформулируем основной результат работы — теорему равносходимости.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (11), (15), (24), (28). *Тогда для любой* $f(x) \in L[0,1]$ *имеют место следующие соотношения*:

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j} \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x) \Big\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{3j} \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x - \tfrac{1}{2}) \Big\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — *частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k, *для которых* $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — *частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на отрезке* $[0, \frac{1}{2}]$ *по системе* $\left\{e^{4k\pi i x}\right\}$ *для тех* k, *для которых* $|4k\pi| < r$; γ_{ij} (δ_{ij}) — *компоненты матрицы* Γ (Γ^{-1});

$$\varphi_j(x) = \delta_{j1} f(x) + \delta_{j2} f(\tfrac{1}{2} - x) + \delta_{j3} f(\tfrac{1}{2} + x) + \delta_{j4} f(1-x), \quad \varepsilon \in (0, \tfrac{1}{4}).$$

Доказательство. Имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A) f \, d\lambda, \quad \sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda} f \, d\lambda,$$

где $R_{0\lambda} f$ — решение краевой задачи

$$y' - \lambda y = f, \quad y(0) = y(\tfrac{1}{2}).$$

Пусть $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$. Тогда, в силу теоремы 4

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} z_1(x) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(\Gamma h(x)\right)_1 \, d\lambda,$$

где $(\,\cdot\,)_1$ — первая компонента вектора, помещенного в скобки.

Тогда по лемме 4

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j} h_j(x) d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j} u_j(x)) d\lambda + o(1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} u_j(x) \right) d\lambda + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$. Значит, первая часть теоремы доказана.

Аналогично доказывается случай, когда $x \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. $\square$

3. Пример интегрального оператора с кусочно-постоянным ядром. Приведем пример оператора с кусочно-постоянным ядром (3), для которого выполняются условия (11), (15), (24), (28).

Пусть $\alpha_1 = 1 + i$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4 - i$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha_5 = 2$. В этом случае $a = 1 - i$, $b = 1$, $c = -2 + i$, $d = -2$, а матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1 & 0 \\ i-1 & 0 & 0 & -1 \\ 2-i & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2+i & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие (11) выполняется, так как $ad - cb = -8 + 6i \neq 0$. Условие (15) также выполняется: $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 5i \neq 0$.

Условия (24) для диагонализации матрицы Q выполняются:

$$d + a = -1 - i \neq 0, \quad (a-d)^2 + 4bc - 8 + 6i \neq 0.$$

Матрица D, подобная матрице Q, имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрица подобия Γ, которая осуществляет преобразование подобия, имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -2-i & -2-i & -1 \\ -i & 2i-1 & 1-2i & i \\ i & -5i & 5i & -i \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае условие (28) также выполняется, так как $P_1 = 12.48 + 10.64i$, $P_0 = -6.72 - 14.96i$ и $P_1 P_0 \neq 0$.

4. Выводы. Таким образом, в работе рассмотрен класс интегральных операторов с кусочно-постоянными ядрами, для которых помимо задачи получения теоремы равносходимости получены достаточно простые для проверки условия обращения и условия регулярности, в отличие от операторов, рассмотренных в [10, 12]. При получении этих условий имеются определенные трудности, но они преодолимы. Из приведенного примера можно сделать вывод, что существуют операторы, ядра которых удовлетворяют всем перечисленным выше условиям.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Stekloff W. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions // *Communications de la Société mathématique de Kharkow. 2-ée série*, 1907. vol. 10. pp. 97–199 (In French).
2. Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions // *Lond. M. S. Proc.* (2), 1908. vol. 6, no. 1. pp. 349–395. doi: 10.1112/plms/s2-6.1.349.
3. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // *Math. Ann.*, 1910. vol. 69, no. 3. pp. 331–371 (In German). doi: 10.1007/BF01456326.
4. Тамаркин Я. Д. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.* Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917.
5. Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1926. vol. 28, no. 4. pp. 695–761. doi: 10.2307/1989072.
6. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
7. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908. vol. 9, no. 2. pp. 219–231. doi: 10.2307/1988652.
8. Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary differential equations // *Trans Amer. Math. Soc.*, 1908. vol. 9, no. 4. pp. 373–397. doi: 10.2307/1988661.
9. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // *Матем. сб.*, 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.
10. А. П. Хромов Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // *Матем. сб.*, 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. doi: 10.4213/sm1534.
11. Расулов М. Л. *Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1964. 464 с.
12. Королева О. А., Хромов А. П. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2012. Т. 12, № 2. С. 6–13.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 184–197
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1583

MSC: 47G10, 45P05, 47A70

The equiconvergence theorem for an integral operator with piecewise constant kernel

O. A. Koroleva

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to the equiconvergence of the trigonometric Fourier series and the expansions in the eigen and associated functions of the integral operator A, the kernel of which has jumps on the sides of the square inscribed in the unit square. An equivalent integral operator in the space of 4-dimension vector-functions is introduced. This operator is remarkable for the fact that the components of its kernel have discontinuities only on the line diagonal. Necessary and sufficient conditions of the invertibility of the operator A are obtained in the form that a certain 4^{th} order determinant is not zero. The Fredholm resolvent of the operator A is studied and its formula is found. The constructing of this formula is reduced to the solving of the boundary value problem for the first order differential system in the 4-dimension vector-functions space. To overcome the difficulties of this solving the transformation of the boundary value problem is carried out. Conditions analogous to Birkhoff regularity conditions are also obtained. These conditions mean that some 4^{th} order determinants are not zero and can be easily verified. Under these conditions the determinant, which zeros are the eigenvalue of the boundary value problem, can be estimated. The equiconvergence theorem for the operator A is formulated. The basic method used in the proof of this theorem is Cauchy–Poincare method of integrating the resolvent of the operator A over expanding contours in the complex plane of the spectral parameter. An example is also given of the integral operator with piecewise constant kernel, which satisfies all the requirements obtained in the paper.

Keywords: resolvent, eigenfunctions and associated functions, equiconvergence theorem.

Received: 26th November, 2017 / Revised: 12th February, 2018 /
Accepted: 12th March, 2018 / First online: 29th March, 2018

Short Communication

Please cite this article in press as:
Koroleva O. A. The equiconvergence theorem for an integral operator with piecewise constant kernel, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 184–197. doi: 10.14498/vsgtu1583 (In Russian).

Author's Details:
Olga A. Koroleva http://orcid.org/0000-0001-9692-5646
Senior Lecturer; Dept. of Computer Algebra & Number Theory;
e-mail: korolevaoart@yandex.ru

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Stekloff W. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions, *Communications de la Société mathématique de Kharkow. 2-ée série*, 1907, vol. 10, pp. 97–199 (In French).
2. Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions, *Lond. M. S. Proc.* (2), 1908, vol. 6, no. 1, pp. 349–395. doi: 10.1112/plms/s2-6.1.349.
3. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.*, 1910, vol. 69, no. 3, pp. 331–371 (In German). doi: 10.1007/BF01456326.
4. Tamarkin Ya. D. *O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh lineinykh differentsial'nykh uravnenii* [On some general problems in the theory of ordinary linear differential equations and on the expansion in series of arbitrary functions]. Petrograd, 1917 (In Russian).
5. Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1926, vol. 28, no. 4, pp. 695–761. doi: 10.2307/1989072.
6. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)
7. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, no. 2, pp. 219–231. doi: 10.2307/1988652.
8. Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary differential equations, *Trans Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, no. 4, pp. 373–397. doi: 10.2307/1988661.
9. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators, *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. doi: 10.1070/SM1982v042n03ABEH002257.
10. Khromov A. P. Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines, *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669–1696. doi: 10.1070/SM2006v197n11ABEH003817.
11. Rasulov M. L. *Methods of contour integration*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1967, xiv+439 pp.
12. Koroleva O. A., Khromov A. P. Integral operator with kernel having jumps on broken lines, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 2, pp. 6–13 (In Russian).