УДК 517.984

# АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ

**О. А. Королева (Саратов, РФ)**
korolevaoart@yandex.ru

В работе найдены условия разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям скалярного дифференциального оператора $L$, где

$$L:\ Ly = y'\ ;\ U(y) = y(0) - y(1) + \int\limits_0^1 a(t)y(t)\,dt = 0,$$

где $a(t)$ - непрерывная функция на $[0,1]$. Как известно, для частичной суммы ряда Фурье $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$, где $R_\lambda f$ - резольвента оператора $L$.
Рассмотрим краевую задачу:

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x), \tag{1}$$

$$U(y) = 0 \tag{2}$$

Решение задачи (1),(2) $y(x,\lambda) = R_\lambda f$, имеет вид [1]:

$$R_\lambda f = -e^{\lambda x} \triangle^{-1}(\lambda)\int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt + g_\lambda f(x),$$

где $\triangle(\lambda) = U(e^\lambda)$, $U_x$ означает, что $U$ применяется по $x$,
$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } Re\lambda \geqslant 0, \\ \varepsilon(x,t)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } Re\lambda < 0, \end{cases}$
$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leqslant x, \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases}$
$g_\lambda f(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)f(t)dt.$

Рассмотрим $f(x) \in C\,[0,1] \cap V\,[0,1]$. Известно, если
$g(x) \in C^1\,[0,1]$, то

$$\int\limits_a^b g'(x)f(x)\,dx = g(x)f(x)\,|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x) \tag{3}$$

Будем считать, что $Re\lambda \le 0$. (Случай $Re\lambda \ge 0$ рассматривается аналогично.)
**Лемма 1.** *Имеет место формула:*

$$\int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt = \frac{1}{\lambda}\left(f(1) - e^{\lambda} f(0)\right) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\, df(t) -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)e^{\lambda\tau}f(0)\, d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)\, d\tau \int\limits_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)}\, df(t)$$

Доказательство. В самом деле,
$U_x(g(x,t,\lambda) = g(0,t,\lambda) - g(1,t,\lambda) + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\, d\tau = -e^{\lambda(1-t)} + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\, d\tau$.
Тогда

$$\int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda)f(t)\, dt = -\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}f(t)\, dt + \int\limits_0^1 a(\tau)\, d\tau \int\limits_0^1 f(t)g(\tau,t,\lambda)\, dt.$$

Разбив внутренний интергал второго слагаемого на два – первый от 0 до $\tau$, а второй от $\tau$ до 1 и применив формулу (3) в каждом слагаемом, получим требуемое.
Лемма доказана.

Аналогично лемме 1 можно доказать лемму:
**Лемма 2.** *Выполнятся равенство:*
$g_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\, df(t)$ Вернемся к решению задачи (1).
**Лемма 3.** *Если $f(x)$ удовлетворяет (2), то $R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \Omega_\lambda f$, где $\Omega_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]$, где*
$I_1 = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^x e^{-\lambda t}\, df(t)$, $I_2 = \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\, df(t)$,
$I_3 = -\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 a(x)\, dx \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\, df(t)$.
Доказательство. Очевидно из леммам (1), (2).

Удалим из комплексной плоскости собственные значения оператора $L$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса $\delta_0$. В полученной области $S_{\delta_0}$ при $Re\lambda \le 0$ справедлива оценка $|\Delta(\lambda)| \ge c\left|e^{-\lambda}\right|$. Теперь можно сформулировать основной результат.
**Теорема 1.** *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, имеет на нем ограниченную вариацию и удовлетворяет (2), то*

$$\max_{0\le x\le 1} |f(x) - S_r(f,x)| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

*где $r$ таково, что окружность $|\lambda| = r$ находится в $S_{\delta_0}$.* Доказательство. На основании предыдущей леммы достаточно показать, что

$$\max_{0\le x\le 1} \left| \int\limits_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda f\, d\lambda \right| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Зададим сколь угодно малое $\varepsilon$. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое что $\bigvee\limits_{1-\delta}^{1}(f) < \varepsilon$. Значит, для первого слагаемого в $\Omega_\lambda$ при $|\lambda| = r$:

$$\left|\tfrac{1}{\lambda} I_1\right| \le \tfrac{|e^{\lambda}||e^{\lambda x}|}{c\cdot r} \left\{ \int\limits_0^{x-\delta} \left|e^{-\lambda t}\right| |df(t)| + \int\limits_{x-\delta}^{x} \left|e^{-\lambda t}\right| |df(t)| \right\} \le$$

$$\le \tfrac{|e^{\lambda x}|}{c\cdot r} \int\limits_0^{x-\delta} \left|e^{-\lambda(x-\delta)}\right| |df(t)| + \tfrac{1}{c\cdot r} \int\limits_{x-\delta}^{x} \left|e^{\lambda(x-t)}\right| |df(t)| \le$$

$$\le \tfrac{1}{c\cdot r} \left\{ \int\limits_0^{x-\delta} \left|e^{\lambda\delta}\right| |df(t)| + \int\limits_{x-\delta}^{x} |df(t)| \right\} \le \tfrac{1}{c\cdot r} \left\{ \left|e^{\lambda\delta}\right| \bigvee_0^1(f) + \bigvee_{1-\delta}^1(f) \right\} \le$$

$$\le \tfrac{c}{r} \left\{ \left|e^{\lambda\delta}\right| + \varepsilon \right\},$$

где за $c$ обозначены разные константы. Аналогично для остальных слагаемых из $\Omega_\lambda$. Поэтому $\left| \int\limits_{|\lambda|=r}{}' \Omega_\lambda f\, d\lambda \right| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, где $(')$ означает часть $|\lambda| = r$, в которой $Re\lambda \le 0$.
Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях. Матем. сборник., **197**:11 (2006), с. 115 – 142.