УДК: 517.984

Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов

О.А. Королева

korolevaoart@yandex.ru; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

Аннотация

В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрческие ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Ключевые слова: равносходимость, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int\limits_0^1 A\,(x,t)\;f(t)\,dt. \tag{1}$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t), \quad (i = 1, ..., 5)$ непрерывны в своих областях, $(k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1)$. $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t), \quad (i = 1, ..., 5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a,$
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b,$
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c,$
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d,$
где a, b, c, d – постоянные.

То есть ядро $A\,(x,t)$ может быть имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. В пространстве вектор–функций рассматривается оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t) g(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & A(x,\frac12-t) & A(x,\frac12+t) & 0\\ A(\frac12-x,t) & 0 & 0 & A(\frac12-x,1-t)\\ A(\frac12+x,t) & 0 & 0 & A(\frac12+x,1-t)\\ 0 & A(1-x,\frac12-t) & A(1-x,\frac12+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В [1] доказывается, что (1) эквивалентно (2).

Теорема 1. *Для оператора B^{-1} справедливо представление:*

$$B^{-1}z(x)=Pz'(x)+a_1(x)z(0)+a_2(x)z\left(\frac12\right)+a_3(x)z(x)+\int_0^{\frac12}a(x,t)z(t)\,dt, \qquad (3)$$

$$Sz(0)+Tz(\frac12)+\int_0^{\frac12}a(t)z(t)\,dt=0. \qquad (4)$$

где $a_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, S, T –некоторые постоянные матрицы 4×4.

Находится резольвента оператора A:

Теорема 2. *Если R_λ существует, то $R_\lambda f=v(x)$, где*

$$v(x)=z_1(x),\ \textit{при}\ x\in[0,\frac12],\ \textit{и}\ v(x)=z_3\left(x-\frac12\right),\ \textit{при}\ x\in[\frac12,1], \qquad (5)$$

z_1,z_3 - первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (3), (4).

Также доказывается обратное утверждение:

Теорема 3 *Если λ таково, что однородная краевая задача для (3), (4).) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (5).*

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} w'(x)&=\lambda Dw(x)+m(x),\\ U(w)&=0, \end{aligned}, \qquad (6)$$

где $m(x)$ произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,\frac12]$.

Для решения системы (6) $w=R_{1\lambda}m$ доказываются оценки:

$$\begin{aligned} &\|R_{1\lambda}m\|_\infty=O(\|m\|_1),\\ &\|R_{1\lambda}m\|_\infty=O(\psi(\lambda)\,\|m\|_\infty),\\ &\|R_{1\lambda}m\|_1=O(\psi(\lambda)\,\|m\|_1),\\ &\|R_{1\lambda}\chi\|_\infty=O(\tfrac1\lambda), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ нормы в пространстве вектор функций $L_\infty(0,\frac12)$, $L(0,\frac12)$, $\chi(x)$ - вектор функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $\left[0,\frac12\right]$, $\psi(\lambda)=\sum_{j=1}^4\varkappa\left(|Re\,\lambda\omega_j|\right)$, $\varkappa(y)=\frac{1-e^{-y}}{y}$ при $y\ge0$.

Основной результат – теорема равносходимости:

Теорема 4. *Пусть существует A^{-1}, ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям из пункта 1.1. Тогда в S_δ для любой $f(x)\in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-\sum_{j=1}^4\gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j,x)\|_{[\varepsilon,\frac12-\varepsilon]}=0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-\sum_{j=1}^4\gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j,x-\frac12\right)\|_{[\frac12+\varepsilon,1-\varepsilon]}=0,$$

где $S_r(f,x)$*-частичная сумма ряда Фурье, по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k*, для которых* $|\lambda_k| < r, \sigma_r(f,x)$*-частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на* $[0,\frac{1}{2}]$ *по системе* $\left\{e^{4k\pi ix}\right\}$ *для тех* k*, для которых* $|4k\pi| < r$*,* γ_{ij} (δ_{ij}) *компоненты некоторой постоянной матрицы* $\Gamma(\Gamma^{-1})$*,* $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(\frac{1}{2}-x) + \delta_{j3}f(\frac{1}{2}+x) + \delta_{j4}f(1-x)$*.*

Список литературы

[1] Королева О. А., Хромов А П. *Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях* // Известия Сарат. ун-та. – Новая серия– Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, – 2012. – Т. 12(2). –С. 6–13.

Integral operator with kernel having jumps on broken lines

O.A. Koroleva

Abstract

In this paper we study equiconvergence expansions in trigonometric Fourier series, and in eigenfunctions and associated functions of an integral operator whose kernel suffers jumps at the sides of the square inscribed in the unit square.

Keywords: equiconvergence, resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions.