УДК 517.984

О. А. Королева

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА СТОРОНАХ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ЕДИНИЧНЫЙ КВАДРАТ

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\ f(t)\,dt. \tag{1}$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t)$, $\quad (i = 1, ..., 5)$ непрерывны в своих областях, $(k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1)$. $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t)$, $\quad (i = 1, ..., 5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,
где a, b, c, d – постоянные.

То есть ядро $A\,(x,t)$ может быть имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.
В работе изучается работы является оператор (1). Для него доказывается аналог теоремы Жордана–Дирихле.
В пространстве вектор–функций рассматривается оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x,\frac{1}{2}-t) & A(x,\frac{1}{2}+t) & 0 \\ A(\frac{1}{2}-x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}-x,1-t) \\ A(\frac{1}{2}+x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}+x,1-t) \\ 0 & A(1-x,\frac{1}{2}-t) & A(1-x,\frac{1}{2}+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В [1] доказывается, что (1) эквивалентно (2).

Теорема 1. *Для оператора B^{-1} справедливо представление:*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t)\,dt, \tag{2}$$

$$Sz(0) + Tz(\frac{1}{2}) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t)\,dt = 0. \tag{3}$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, S, T –некоторые постоянные матрицы 4×4.

Находится резольвента оператора A:

Теорема 2. *Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где*

$$v(x) = z_1(x), \text{ при } x \in [0,\frac{1}{2}], \text{ и } v(x) = z_3\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ при } x \in [\frac{1}{2},1], \tag{4}$$

z_1, z_3 - первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (3), (4).

Также доказывается обратное утверждение:

Теорема 3 *Если λ таково, что однородная краевая задача для (3), (4).) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (5).*

Основной результат:

Теорема 4. *Если $f(x) \in \bar{\Delta}_A$, где $\bar{\Delta}_A$ - замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0,1]$, то*

$$\|f(x) - S_r(f,x)\|_\infty \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Королева О. А.* Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Известия Сарат. ун-та. – Новая серия– Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, – 2012. –Т. 12(2). –С. 6–13.

СОДЕРЖАНИЕ