ТЕОРЕМА ЖОРДАНА-ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

О.А. Королева[1] (Саратов)
korolevaoart@yandex.ru

В работе найдены достаточные условия (условия типа Жордана-Дирихле) разложения функции $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Как известно, для такого разложения необходимо, чтобы $f(x)$ была непрерывна и принадлежала замыканию области значений интегрального оператора. Оказывается, если $f(x)$ к тому же является функцией ограниченной вариации, эти условия являются и достаточными.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\; f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Предположим, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t), \quad (i = 1,...,5)$ непрерывны в своих областях, ($k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1$). $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t), \quad (i = 1,...,5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,
где a, b, c, d - постоянные.

Оператора (1) впервые рассматривался в [1]. В [1] также найдены необходимые и достаточные условия существования оператора

A^{-1}. На a, b, c, d накладываются условия $d+a \neq 0$, $(a+d)^2+4bc \neq 0$, $ad-bc \neq 0$ из [1–2], тогда можно доказать теорему:

Теорема. *Если $f(x) \in \bar{\Delta}_A$, где $\bar{\Delta}_A$ - замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0,1]$, то*

$$\|f(x) - S_r(f,x)\|_\infty \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda$

Литература

1. Королева О. А. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях/О .А. Королева, А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та, серия Математика. Механика. Информатика. — 2012.— Т. 12, № 2.— С 6–13.

2. Королева О.А. О сходимости средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях /О .А. Королева// Изв. Сарат. ун-та, серия Математика. Механика. Информатика.— 2013.— Т. 13, № 1, ч.2. —С 63–67.