Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный социально-экономический университет»

Кафедра прикладной математики и информатики

И.Ю. Выгодчикова

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
080100.62 «Экономика»

Профили:
«Мировая экономика»
«Финансы и кредит»
«Налоги и налогообложение»
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»
«Экономика предприятий и организаций»
«Экономика учреждений и организаций социальной сферы»
«Экономика и право»
«Статистика»

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Саратов
2012

УДК 330.4
ББК 65.631
В92

Выгодчикова И.Ю.
В92 Основы финансовых вычислений: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 080100.62 «Экономика» (профили: «Мировая экономика», «Финансы и кредит», «Налоги и налогообложение», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Экономика предприятий и организаций», «Экономика учреждений и организаций социальной сферы», «Экономика и право», «Статистика») / Саратовский государственный социально-экономический университет. – Саратов, 2012. – 108 с.
ISBN 978-5-4345-0141-5

Учебное пособие «Основы финансовых вычислений» позволяет повысить качество обучения студентов методике и практике использования финансово-экономических расчетов при решении конкретных задач. В нем содержатся теоретические и практические материалы, наглядно демонстрирующие, как производить начисления процентов, обобщать характеристики потоков платежей, проводить количественный анализ финансовых и кредитных операций, оценивать эффективность краткосрочных инструментов и долгосрочных финансовых операций, включая производственные инвестиции.

Описаны математические модели оптимизации финансовых операций, схемы этих моделей и специфика применения. Включены вопросы для самопроверки, задачи и варианты контрольных работ.

Для студентов вузов, изучающих экономику, финансы, инвестиции, страховое дело и т.п., а также для практиков – сотрудников банков, финансовых и страховых компаний, инвестиционных и пенсионных фондов.

Рекомендует редакционно-издательский совет Саратовского государственного социально-экономического университета 20.03.2012 г.

Рецензенты:
канд. ф.-м. наук, доцент *О.В. Мещерякова,*
доктор экон. наук, профессор *В.А. Балаш*

УДК 330.4
ББК 65.631

ISBN 978-5-4345-0141-5

ВВЕДЕНИЕ

Деньги являются основным финансовым инструментом экономического взаимодействия агентов. Несмотря на различные формы существования, деньги представляют собой единственный товар, являющийся эквивалентом любой сделки. Они имеют ряд важных характеристик. Во-первых, стоимость денег непосредственно зависит от того, в какой момент времени она измеряется. Деньги могут терять свою ценность, поэтому их владелец должен уметь сопоставлять те суммы, которые он имел вчера, с теми, которые он имеет сегодня и предполагает получить завтра, учитывая как возможность извлечения дополнительной прибыли, так и угрозу снижения стоимости капитала. Во-вторых, деньги – неотъемлемая часть любой финансовой сделки, поэтому важно четко обосновывать согласие на участие в той или иной сделке и в нужный момент сделать правильный выбор.

Как правило, одна и та же сделка сопровождается потоком финансовых платежей, включая разнонаправленные действия. Например, кредитуя клиента, банк может предложить возвращать долг в рассрочку. Покупая ценную бумагу, инвестор планирует получать в будущем некоторые регулярные доходы по ней. Для вступления в бизнес требуется многократно вкладывать деньги, и только через достаточно длительный срок можно ожидать окупаемости вложений. Даже расходы на покупку товаров повседневного спроса необходимо планировать.

Время играет ведущую роль в финансовых отношениях, поэтому очень важна процентная ставка, под которую инвестор готов предоставить свои денежные средства для их рационального прибыльного использования в производстве, сфере услуг, на рынке ценных бумаг и в кредитно-финансовой сфере. Процентная ставка, которую предлагают банки, должна не только покрывать инфляционное обесценение денег, но и позволять получать дополнительный доход от их использования.

В связи с гиперинфляционными процессами в 1990-х г. российские граждане весьма осторожно подходят к вложению своих средств и не доверяют банкам и инвестиционным фондам, которые предлагают явно завышенные процентные ставки. Однако финансовые пирамиды постепенно отходят в прошлое, поскольку «работать» могут лишь деньги, вложенные в реальное производство. А вот насколько удачными окажутся вложения, зависит от компетентности финансовых менеджеров, которые должны тщательно проанализировать все финансовые стороны процесса и составить грамотный бизнес-план, который заинтересует инвесторов. Ни один инвестор не вложит деньги в неизвестность, поэтому важно уметь оценить рисковую составляющую проекта.

В пособии излагаются основные приемы применения математического аппарата при анализе финансовых операций и некоторые аспекты инвестиционного моделирования. Приводятся задачи для самостоятельного решения к каждой главе, контрольная работа и задание для итогового контроля по всему курсу.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1.1. Простые и сложные проценты. Эффективная ставка

Основными параметрами финансовой сделки являются: $S(0)$ – начальная сумма денег, предоставляемая в долг на время T; $S(T)$ – возвращаемая сумма денег через период T и срок сделки T, обычно измеряемый в годах.

Доходность – это количественная мера позитивного эффекта финансовых операций, связанных с вложением денег. Негативной стороной таких операций является риск, связанный с возможностью финансовых потерь. Анализ позитивных и негативных факторов позволяет говорить об эффективности финансовой операции. Начнем с рассмотрения способов расчета показателей доходности.

При расчете доходности любой операции производится анализ затрат и результатов.

Основные виды доходности.

1. Доходность сделки за период, или *инвестиционный доход*:

$$I = S(T) - S(0),$$

где $S(T)$ – возвращаемая сумма денег через период T; $S(0)$ – начальная сумма денег, подлежащая инвестированию на время T.

2. Коэффициент прироста капитала, называемый также *относительным ростом* или *процентной ставкой*:

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)},$$

измеряется в долях или в процентах в зависимости от цели анализа.

3. Коэффициент дисконтирования, или *относительная скидка*:

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}.$$

Указанные величины связаны соотношением $1 + r_T = \dfrac{1}{1 - d_T}$.

4. Эффективная (нормированная) доходность (внутренняя норма доходности). Суть этого показателя годовой эквивалент доходности.

Если проценты по вкладам начисляются раз в год, то в контракте фигурирует годовая процентная ставка r, или годовой дисконт d, и тогда

$$1 + r = \frac{1}{1 - d}. \qquad (1.1)$$

С течением времени начальная сумма вклада $S(0)$ возрастает под влиянием годовой процентной ставки r.

Наращение – это вычисление будущей стоимости $S(T)$ текущей денежной суммы $S(0)$. Для расчетов используются следующие схемы:

а) *схема простых процентов*

$$S(T) = S(0) \cdot (1 + T \cdot r); \qquad (1.2)$$

б) *схема сложных процентов*:

$S(T) = S(0) \cdot (1 + r)^T$ – при начислении сложных процентов ежегодно; (1.3)

$S(T) = S(0)\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{T \cdot m}$ – при начислении сложных процентов m раз в году. (1.4)

Множителем наращения (*мультиплицирующим множителем*) M_m называют величину, на которую умножается начальная сумма $S(0)$ для получения конечной суммы $S(T)$. В формулах (1.2) – (1.4) это, соответственно, $(1 + T \cdot r)$, $(1 + r)^T$ и $\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{T \cdot m}$.

При простых процентах конечная сумма $S(T)$ является линейной функцией времени, а при сложных процентах – показательной. Скорость роста степенной функции по сравнению со скоростью роста линейной функции зависит от значения аргумента. При $T > 1$ начальная сумма увеличивается быстрее по схеме (1.3), чем по схеме (1.2), а при $T < 1$ наоборот.

При непрерывном начислении сложных процентов, выполним в (1.4) предельный переход, устремляя $m \to \infty$:

$$S(T) = S(0)\exp(Tr).$$

Мультиплицирующий множитель $\exp(Tr)$ часто называют *силой роста*.

В банковской практике часто применяется ежемесячное, ежеквартальное и полугодовое начисление процентов по вкладам. Чтобы оценить накопленную сумму, нужно применять формулу (1.4) с величиной m равной 12, 4 и 2, соответственно, причем показательный рост суммы оправдан уже при $T \cdot m > 1$. На самом деле формула (1.4) ничего нового для расчетов не вносит, просто можно применять формулу (1.3), считая, что T – число периодов, а r – процентная ставка за период.

Если срок сделки больше одного года, но не является целой величиной, то целесообразно комбинировать схемы простых и сложных процентов. При ежегодном начислении сложных процентов формула комбинированной схемы следующая:

$$S(T) = S(0)(1+r)^{[T]}(1 + r\cdot\{T\}),\quad \{T\} = T - [T], \tag{1.5}$$

где через $[T]$ обозначена целая часть числа лет. Если сложные проценты начисляются m раз в году, эта формула принимает вид:

$$S(T) = S(0)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{[T]\cdot m+[\{T\}\cdot m]}\left(1+\frac{r}{m}\cdot\{T\}_m\right),\quad \{T\}_m = \{T\}\cdot m - [\{T\}\cdot m]. \tag{1.6}$$

Несмотря на громоздкость, эта формула проста в применении, как будет видно из примера 1.3.

Заметим, что в зависимости от обстоятельств, ставки могут измеряться в долях или в процентах, хотя в расчетах всегда используются доли. Для выполнения расчетов можно пользоваться стандартными финансовыми функциями электронных таблиц.

Если процентная ставка меняется, то при долгосрочных операциях применяют формулу начисления процентов с учетом *реинвестирования* средств:

$$S(T) = S(0)\prod_{j=1}^{n}(1+r_j).$$

Мультиплицирующим множителем будет $\prod\limits_{j=1}^{n}(1+r_j)$.

Пример 1.1. Что выгоднее покупателю «бесконечно» делимого товара: получить скидку 10% или «довесок» 10% при сохранении цены?

Решение. Скидку получить выгоднее, поскольку во втором случае скидка составит лишь $\frac{0,1}{1+0,1}\approx 0,0909$ (9,1 %).

Пример 1.2. Банк предоставил ссуду в размере 5 000 дол. на 39 месяцев под 20% годовых на условиях начисления сложных процентов m раз в году. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах начисления процентов: а) схема сложных процентов; б) комбинированная схема, если m=1, m=2, m=6.

Решение.

1. Пусть m=1. Выразим 39 мес. в годах, считая, что в году 360 дней, в месяце 30 дней: $T=\frac{39\cdot 30}{360}=\frac{13}{4}=3,25$ и воспользуемся формулами (1.3), (1.5):

а) $S(3,25)=5000\cdot(1+0,2)^{3,25}=9042,93$ дол.,

б) $S(3,25)=5000\cdot(1+0,2)^{3}\cdot(1+0,2\cdot 0,25)=9072$ дол.

2. При m=2 воспользуемся формулами (1.4), (1.6), поскольку $[\{T\}\cdot m]=[0,5]=0$, то формула (1.6) сводится к (1.5):

а) $S(3,25)=5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{3,25\cdot 2}=9290$ дол.;

б) $S(3,25)=5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{6}\cdot(1+0,2\cdot 0,25)=9300,7$ дол.

3. При m=6 воспользуемся формулами (1.4), (1.6):

а) $S(3,25)=5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{6}\right)^{3,25\cdot 6}=9476,73$ дол.;

б) $S(3,25)=5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{6}\right)^{18+1}\cdot(1+\frac{0,2}{6}\cdot 0,5)=9477,9$ дол.

Процентная ставка, которая объявлена в договоре и используется в расчетах, называется *номинальной*.

Эффективной называется годовая ставка по сложным процентам, которая позволяет за указанную в договоре сумму $S(0)$ через T лет получить сумму $S(T)$ независимо от указанной схемы начисления и номинальной процентной ставки. Значение эффективной ставки

$$r_{ef}=\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{T}}-1 \tag{1.7}$$

позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам. Чем выше эффективная ставка, тем (при прочих равных условиях) выгоднее сделка для кредитора.

Пример 1.3. Оценить по уровню процентной ставки и скидки вексель номиналом 300 тыс. руб. с датой погашения 15 мая 2010г., купленный 15 ноября 2009г. за 275 тыс. руб. (при использовании схем банковского и математического дисконтирования). Рассчитать эффективную ставку.

Решение.

1. Заметим, что $T=0,5$, $S(0)=S=275$, $S(T)=N=300$.

2. Рассчитаем сначала процентную ставку при простых процентах: $S(0)=S(T)\cdot\frac{1}{1+T\cdot r}\Rightarrow r=\frac{1}{T}\left(\frac{S(T)}{S(0)}-1\right)=\frac{1}{0,5}\left(\frac{300}{275}-1\right)=0,181818.$

3. Если использовать банковскую формулу дисконтирования, получим:

$$d=\frac{1}{T}-\frac{1}{T}\frac{S}{N}=\frac{1}{0,5}-\frac{1}{0,5}\frac{275}{300}=0,16667.$$

4. Можно сделать вывод, что различие в используемых схемах расчетов может привести к затруднению анализа. Для этого в процентных расчетах вводится эталон сравнения – эффективная ставка. Вычислим эффективную ставку:

$$r_{ef}=\left(\frac{300}{275}\right)^{\frac{1}{0,5}}-1=0,19\ (19\ \%).$$

Отсюда получаем учетную ставку, эквивалентную найденной эффективной: $d=0,19/1,19=0,1597$ (15,97 %).

Если начисление ведется по схеме сложных процентов m раз в году, то

$$r_{ef}=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1, \tag{1.8}$$

в частности, при $m=1$ и $r_{ef}=r$.

Если сложные проценты начисляются непрерывно, то $S(T)=S(0)\exp(Tr)$, $r_{ef}=\exp(r)-1$.

Пример 1.4. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку:

а) процентная ставка составляет 28% годовых, сложные проценты начисляются ежеквартально;

б) процентная ставка составляет 29% годовых, сложные проценты начисляются раз в полгода;

в) процентная ставка составляет 27,5% годовых, сложные проценты начисляются непрерывно.

Решение. В случае а), $r=0,28$, $m=4$. По формуле (1.11):

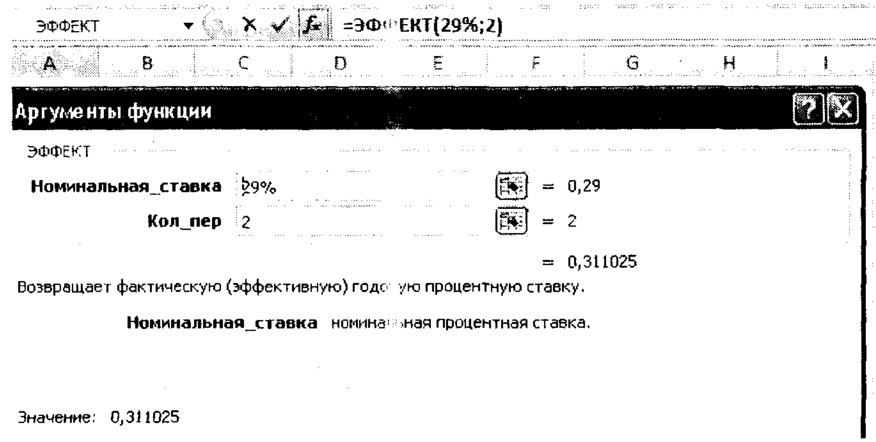
$$r_{ef}=\left(1+\frac{0,28}{4}\right)^{4}-1=0,31\ [31\%].$$

В случае б), $r=0,29$, $m=2$. Находим $r_{ef}=\left(1+\frac{0,29}{2}\right)^{2}-1=0,311$ [31,1%].

Сравнивая эффективные ставки для случаев а) и б), делаем вывод о том, что банку более выгоден вариант б).

В случае в), r_{ef} =EXP(0,275)-1=0,3165 (31,65 %). Значит последний вариант является наилучшим.

Замечание. В MSExcel (а также в OpenOfficeCalc и других электронных таблицах) существует удобный инструмент вычисления эффективной ставки. В Excel это функция ЭФФЕКТ():



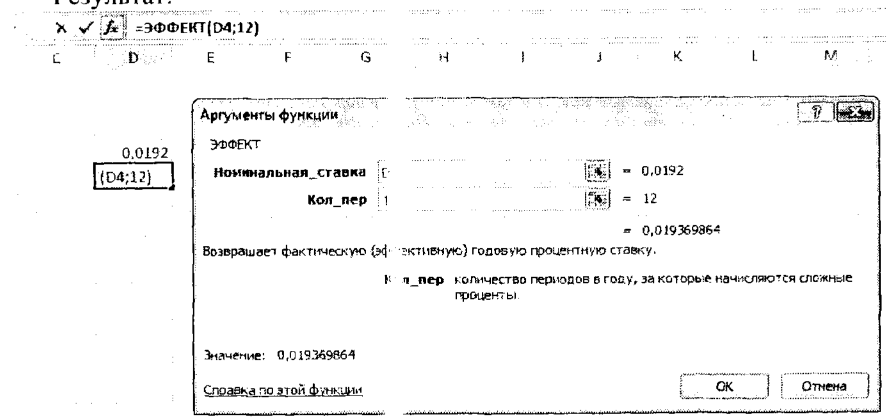
Пример 1.5. В одном банке за использование денег клиента по пластиковой карте ежегодно начисляют сложные 2 %, а в другом банке – ежемесячно сложные 0,16 %. В каком банке держать деньги?

Решение. Выгоднее первый вариант, поскольку эффективная ставка в этом случае выше: $0,02>(1+0,0016)^{12}-1=0,019$.

В данном случае для использования финансовой функции ЭФФЕКТ() нужно рассчитать сначала годовую ставку:

```
=0,16%*12
=ЭФФЕКТ(D4;12)
```

Результат:



1.2. Банковское и математическое дисконтирование

Дисконтирование – вычисление текущей стоимости $S(0)$ будущего денежного поступления $S(T)$.

Банковское дисконтирование применяется для учета банком краткосрочных векселей. Клиент может обратиться в банк с просьбой погасить вексель досрочно. Банк может согласиться выплатить ему сумму, однако ее размер будет меньше, чем указано в векселе:

$$S = N(1 - T \cdot d), \qquad (1.9)$$

где S – сумма выплаты по векселю, N – номинал векселя, T – доля года, равная отношению числа дней до срока платежа к длительности года, d – годовая ставка дисконтирования, определяемая банком. Дисконт по данной операции составит:

$$D = \frac{N - S}{N} = Td, \qquad (1.10)$$

и именно такой доход получит банк от этой сделки [1]. Обычно размер годовой ставки дисконтирования значительно выше средней банковской ставки по кредитованию ввиду того, что число T значительно меньше единицы, и при меньшей ставке такая операция для банка потеряет смысл.

Используя принятые обозначения, формулу (1.9) можно переписать в виде:

$$S(T) = \frac{S(0)}{(1 - T \cdot d)}.$$

Математическое дисконтирование:
при простых процентах:

$$S(0) = S(T) \cdot \frac{1}{1 + T \cdot r}, \qquad (1.11)$$

при сложных процентах с начислением m раз в году:

$$S(0) = S(T) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{T \cdot m}}, \qquad (1.12)$$

в частности, при $m = 1$

$$S(0) = S(T) \cdot \frac{1}{(1 + r)^{T}}. \qquad (1.13)$$

Дисконтирующим множителем D_m называют величину, на которую умножается конечная сумма $S(T)$ для получения начальной суммы $S(0)$. В

формулах (1.11) – (1.13) это, соответственно, $(1 + T \cdot r)^{-1}$, $(1 + r)^{-T}$ и $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-T \cdot m}$.

Связь между мультиплицирующим и дисконтирующим множителе: $M_m = 1 / D_m$.

Пример 1.6. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 5 000 000 руб. со сроком погашения 28.09.2007 г. Вексель предъявлен 13.09.2007 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 75% годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

Решение. Считая, что в году 360 дней, находим $T = \frac{28 - 13}{360} = \frac{1}{24}$, и применяем формулу (1.5) при $N = 5\,000\,000$ млн. руб., $d = 0{,}75$:

$$S(13.09.2007) = 5000000 \cdot \left(1 - \frac{1}{24} \cdot 0{,}75\right) \text{ руб.} = 4\ 84\ 750 \text{ руб.}$$

Найдем эффективную процентную ставку по формуле (1.7):

$$r_{ef} = \left(\frac{5}{4{,}844}\right)^{24} - 1 \approx 114\%.$$

Эквивалентными называются ставки, при которых условия сделки $S(0)$ и $S(T)$ для заданного периода T одни и те же.

Часто процентные ставки, привязанные к конкретной схеме начисления процентов, помечают индексами (s – "simplex" – "простой", c – "complex" – "сложный"). Пусть r_s и r_c – годовые ставки простых и сложных процентов, соответственно. Приравнивая множители наращения: $(1 + T \cdot r_s) = (1 + r_c)^{T}$, находим:

$$r_s = \frac{(1 + r_c)^{T} - 1}{T}; \; r_c = (1 + T \cdot r_s)^{\frac{1}{T}} - 1. \qquad (1.14)$$

Пример 1.7. Г-н X вложил в банк 100 тыс. руб. на 2 года под 25% годовых с условием начисления простых процентов на всю сумму вклада в конце второго года. В целях унификации схем расчетов банк решил начислять сложные проценты ежегодно. Какую минимальную ставку банк должен предложить, чтобы не потерять клиента?

Решение. Чтобы клиент получил предусмотренную договором сумму в конце второго года, банк должен предложить ставку по сложным процентам, эквивалентную ставке по простым процентам, зафиксированной в сделке. Из формул (1.14) непосредственно получаем:

$$r_c = (1 + 2 \cdot 0{,}25)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}225 \quad [22{,}5\%].$$

Эквивалентные сложная процентная ставка r_c и учетная ставка по сложным процентам d_c связаны уже знакомым соотношением:

$$r_c = \frac{d_c}{1-d_c}; \quad d_c = \frac{r_c}{1+r_c}.$$

Банковский дисконт – это учетная ставка при использовании схемы простых процентов. Несложно установить связь учетной ставки при простых процентах (d_s) с процентной ставкой при простых процентах (r_s):

$$1+Tr_s = \frac{1}{1-Td_s}, \quad r_s = \frac{d_s}{1-Td_s}.$$

Найдем процентную ставку для примера 1.6, считая, что используется схема простых процентов:

$$r_s = \frac{d_s}{1-Td_s} = \frac{0{,}75}{1-0{,}75/24} \approx 77{,}42\%.$$

Эквивалентными называются платежи, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени, оказываются равными.

Операция «приведение к моменту T» денежной суммы, относящейся к моменту T_0, означает, что эта сумма наращивается по схеме простых или сложных процентов при $T_0 < T$, и дисконтируется, при $T_0 > T$ причем период операции составляет $|T - T_0|$.

Процентная ставка, вычисленная по формуле:

$$r_0 = \left(\frac{S_2(T_2)}{S_1(T_1)}\right)^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1, \tag{1.15}$$

где $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ – денежные суммы, получаемые через время T_1 и T_2, соответственно, называется *критической (барьерной)*.

Если в расчетах использовать схему сложных процентов и барьерную ставку, то указанные суммы $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ будут эквивалентными. С этой точки зрения барьерная ставка является обобщением понятия эффективной ставки. Действительно, сравним два долгосрочных обязательства: выплатить сумму $S_1(T_1)$ через время T_1 и сумму $S_2(T_2)$ через время T_2, причем $S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$. Поскольку обязательства долгосрочные, наращение происходит по схеме сложных процентов. Эти обязательства будут эквивалентными, если, к примеру, сумма $S_1(T_1)$, наращенная на $T_2 - T_1$ лет, будет равна сумме $S_2(T_2)$:

$$S_1(T_1)\cdot(1+r_0)^{T_2-T_1} = S_2(T_2),$$

откуда вытекает (1.13). Заметим, что формула (1.13) имеет смысл только если $S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$ или $S_1(T_1) \geq S_2(T_2)$, $T_1 \geq T_2$.

Аналогично получается формула для расчета барьерной ставки при использовании в расчетах схемы простых процентов.

Если процентная ставка ниже критической, предпочтительнее получить сумму, которая относится к более позднему моменту времени, а если процентная ставка выше критической ставки, то предпочтительнее более ранняя сумма.

Пример 1.8. Какую сумму предпочтительнее получить при сложной ставке 9% годовых: 1 000 дол. сегодня или 2 000 дол. через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

Решение.

Подсчитаем наращенную величину с суммы 1 000дол. по ставке 9%:

$$S(8) = 1000\cdot(1{,}09)^8 = 1992{,}6 < 2\,000 \text{ дол.}$$

Следовательно, надо предпочесть сумму 2000 дол. через 8 лет.

Найдем барьерную ставку по формуле (1.13)

$$r_0 = \left(\frac{2000}{1000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0{,}091\ (9{,}1\%).$$

При $r=r_0$ выбор безразличен. При $r>r_0$ будет предпочтительнее сумма 1 000 дол. сегодня.

В предыдущем разделе рассматривалось понятие эффективной ставки. Это, по сути, цена кредита, выданного на год с условием возврата всей суммы в конце срока. При анализе финансовых платежей, имеющих характер потока, расчет эффективной ставки производится на основании составления уравнения баланса, т.е. приравнивание дисконтированных или наращенных к выбранному моменту времени сумм, имеющих знак «-» (отток денег) к приведенным к тому же моменту суммам, имеющим знак «+» (приток денег). В качестве ставки дисконтирования используется эффективная ставка.

Например, в счет оплаты за партию товара (стоимость 300 000 руб.) выписано 2 векселя. Один (номинал 200 000 руб.) погашается через 3 месяца, второй (номиналом 120 000руб.) – еще через 3 месяца.

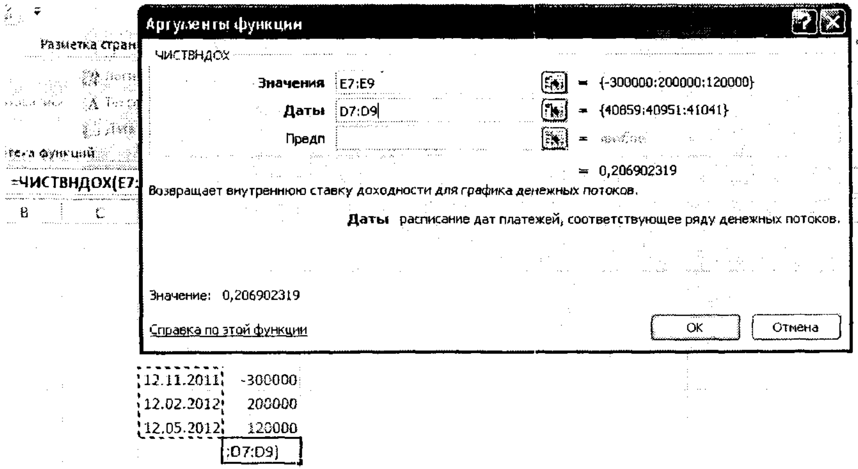
Составляем уравнение баланса для расчета эффективной ставки, дисконтируя все суммы к моменту отгрузки товара:

$$300\,000 = \frac{200\,000}{\left(1+r_{ef}\right)^{3/12}} + \frac{120\,000}{\left(1+r_{ef}\right)^{6/12}}; \quad x = \left(1+r_{ef}\right)^{3/12}; \quad 75x^2 - 50x - 30 = 0;$$

$$x \approx 1{,}048254 \Rightarrow r_{ef} = x^4 - 1 \approx 20{,}744\%.$$

Рекомендуется подобные расчеты выполнять в электронной таблице, используя ссылочную структуру вычислений, или в математической программе, например wxmaxima.

В MSExcel стандартная финансовая функция ЧИСТВНДОХ (в свободно распространяемых электронных таблицах эта функция часто называется иначе, например, в OpenOffice.Calk, XIRR):



Небольшие расхождения в расчетах объясняются различным количеством дней в месяцах года. Так, если сделка была заключена в мае, то в результате получаем 20,56%:

12.05.2012	-300000
12.08.2012	200000
12.11.2012	120000
	0,205586

Ясно, что в любой финансовой сделке фигурируют реальные даты, поэтому расчет с использованием программных средств будет более точным.

Если заменить два векселя одним сроком погашения через 1 год, этот новый вексель должен быть выписан на 362 232рублей.

Более подробно расчет эффективной ставки (кредитование) или внутренней нормы доходности (инвестирование) будет рассмотрен ниже.

1.3. Приложения простых и сложных процентов

1.3.1. Модели счета с переменным капиталом

Рассмотрим модели накопительных счетов, разрешающие довложения (дополнительные инвестиции), приводящие к увеличению инвестируемого капитала. С другой стороны, для некоторых счетов допускается изъятие суммы со счета. Если случай довложения анализируется достаточно просто, то изъятие суммы с накопительного счета приводит при анализе состояния вклада к определенным трудностям.

Случай довложения капитала.

Решение поставленной задачи может быть решено двояким образом. С одной стороны, можно рассматривать внесение дополнительной суммы

как открытие нового счета с той же процентной ставкой. Тогда можно рассматривать начальный и новый счета как два субсчета одного общего счета (*мультисчета*). В модели мультисчета счета, открываемые отдельными взносами, рассматриваются как независимые. Полная сумма на общем счету получается сложением соответствующих сумм на отдельных субсчетах. Таким образом, n последовательных вложений дадут n различных счетов.

Пример 1.9. Пусть вкладчик открывает накопительный счет на сумму 1 000 руб. под 10% годовых. Предположим, что начальный момент времени 0. Пусть через год он вносит еще 1 000 руб. Сколько накопится на счете через 2 года?

По первой сумме через 2 года накопится 1 200 руб. (по простым процентам) или 1 210 руб. (по сложным процентам), по второй сумме 1 100 руб., итого 2 300 руб. по простым процентам, 2 310 руб. (по сложным процентам).

Однако такая модель непригодна при работе с одним счетом, а ведь именно этот случай имеется в виду, когда говорят о довложении или изъятии средств.

Рассмотрим теперь модель, формализующую операции с одним и тем же накопительным счетом. Сначала пусть применяется схема простых процентов. При простых процентах действует основное правило: *проценты за период начисляются лишь на основной (инвестированный) капитал, так что проценты на проценты предыдущих (прошлых) периодов не начисляются.*

Накопительный счет разделяется на 2 компоненты: *основной счет (счет капитала),* который определяется только вносимыми суммами, и *процентный счет,* который учитывает начисленные на инвестированный капитал проценты.

В *бинарной модели* предполагается разделение накопительного счета на основную и процентную части. При этом каждый новый взнос растет на свой срок. Эти модели приводят к одинаковому результату.

В рассмотренном примере на основном будет сумма 1 000 руб., а на процентном через год – 100 руб. После дополнительного взноса сумма на основном счете станет 2 000руб. На эту сумму начисляются проценты за 2-й год – 200 руб. Полная сумма процентов составит 300 руб. Учитывая сумму на основном счете и начисленные за 2 года проценты, получим 2 310 руб.

При начислении сложных процентов через 1 год на основном счете с учетом довложений окажется 2 000 руб., к этой сумме прибавляем проценты 100 руб., и на сумму 2 100 руб. начисляем проценты за следующий год, получим – 2 310 руб., как и для модели мультисчета.

Эти схемы накопления сумм денег эквивалентны.

Случай изъятия капитала.

Рассмотрим пример. Пусть вкладчик открывает накопительный счет на сумму 1 000 руб. под 10% годовых. Предположим, что начальный момент времени 0. Пусть через год снимает 200 руб. Сколько накопится на счете через 2 года, если больше никаких довложений и изъятий денег вкладчик не осуществлял?

В случае простых процентов к концу первого года непосредственно перед изъятием на счете будет 1 100 руб. Изъятие уменьшит счет на 200 руб., остаток 900 руб. Еще через 1 год, учитывая такой счет, должно накопиться 990 руб. Однако при простых процентах проценты на проценты не начисляются. Асимметрия состоит в том, что банку неизвестно, снял ли вкладчик сумму с основного счета или проценты. Если бы вкладчик не снимал 200 руб., а взял кредит на ту же сумму в другом банке под 10% годовых, то в конце срока у него было бы в первом банке накоплено 1 200, а долг перед вторым составил бы 220, итого 980 руб.

При использовании модели мультисчета вкладчику открывается через 1 год второй счет, – 200руб. итого 1200 – 200 – 20 = 980 руб. При бинарной модели основной счет через 1 год составит 800 руб., а процентный 100 руб. Еще через 1 год проценты составят 100+80≈180 руб., итого 980рублей.

На практике банки часто периодически выплачивают проценты по вкладу. Такие выплаты не меняют основной счет (начальный вклад), но при каждой выплате «обнуляют» процентный счет. Например, уменьшение счета за счет снятия 200 руб. наращенного за год значения 1100 можно рассматривать как снятие 100 руб. с процентного и 100 руб. с основного счета. Тогда основной кредит уменьшится до 900 руб.

Различие между изъятиями лишь с основного счета и изъятиями, затрагивающими процентный счет, весьма существенно. Пусть начальный счет 1 000 руб., ставка 10 % годовых, и ежегодно снимается 100 руб. Если это изъятие лишь с процентного счета, то основной счет не меняется и может существовать сколь угодно долго. Если же изъятия осуществляются с основного счета, то он ликвидируется (обнуляется) за 10 лет, а процентный счет при этом достигает наибольшего значения и больше не меняется. Это различие существенно при начислении простых процентов, так как в таком случае проценты начисляются лишь на основной счет. При сложных процентах проценты начисляются на сумму основного и процентного счетов, поэтому в данном случае никакой разницы не будет.

1.3.2. Коммерческое и актуарное правила для бинарной модели

Как следует из вышеизложенного, при простых процентах возникают сложности выделения величины основного капитала при вложениях и изъятиях. На практике чаще всего используют два способа определения

величины (или сальдо) основного счета. Первый способ: все внешние операции (вложения и изъятия) относятся только к основному счету, а процентный счет при этом не изменяется. Это правило обычно называют *коммерческим (или правилом торговца)*. Оно сохраняет полную симметрию между взносами и изъятиями. Модель счета с переменным капиталом в схеме простых процентов, состояние которого определяется согласно коммерческому правилу, назовем коммерческой моделью. Второй способ совпадает с коммерческим правилом при взносах, но изъятие всегда начинается с процентного счета, а основной счет уменьшается лишь на превышение изымаемой суммы над процентной. Это правило разрушает симметрию между взносами и изъятиями. Его называют *актуарным правилом* или правилом США, и здесь уже речь идет фактически лишь о сложных процентах.

Модель, в которой состояние счета определяется по актуарному правилу, назовем *актуарной моделью.*

С изъятиями связана еще одна сложность. Допустим, снимаемая сумма больше основной для коммерческого правила или больше полной для актуарного правила. Тогда знак основного счета изменится, что можно интерпретировать как изменение ролей сторон кредитных отношений. Вкладчик (кредитор), снимая со счета сумму, большую, чем остаток счета, становится должником (дебитором) банка. На практике такая возможность реализуется в так называемом *контокоррентном счете.* Такой счет позволяет владельцу иметь временный отрицательный баланс (овердрафт). Однако процентная ставка, которая в этом случае становится для банка ставкой по кредиту, обычно больше, чем ставка по положительному балансу, т.е. депозитная ставка.

Модели, в которых кредитная и дебетовая ставки совпадают, называют *симметричными.*

Работа с контокоррентными счетами означает отход от накопительной модели счета с переменным капиталом, поскольку такие счета порождаются произвольным потоком платежей, в котором начальное событие означает открытие счета в момент t_0 с начальной суммой (вклада или ссуды) R_0, а остальные события представляют собой внешние действия со счетом, т.е. дополнительные вложения или изъятия средств со счета.

Пример 1.10. (актуарное правило). Пусть ссуда размером $S_0 = 1\ 000$ фунтов стерлингов Соединенного Королевства выдана на год под простую процентную ставку $i = 20\%$. Допустим, что до окончания ссудной операции было сделано три частичных платежа (А):

$A_1 = 600$ фунтов стерлингов через 3 месяца ($t_1 = ¼$ – а как иначе, мы же не знаем точных дат проведения этой ссудной операции) после начала сделки;

$A_2 = 10$ фунтов стерлингов через полгода ($t_2 = ½$) после начала сделки;

$A_3 = 300$ фунтов стерлингов через 9 месяцев ($t_3 = ¾$) после начала сделки.

Найдем последний (погашающий) платеж A_4, сделанный в момент завершения операции (через год после начала сделки).

Первый способ. За время $t_1 = ¼$ года на сумму основного долга (которая равна размеру кредита) было начислено 20% · ¼ · 1 000 = 50 фунтов стерлингов процентных денег. Первый частичный платеж больше, чем эта сумма, поэтому он сначала идет на погашение процентов (50 фунтов), а затем – на погашение основного долга (550 фунтов). В результате после внесения первого частичного платежа размер задолженности заемщика составил S_1 = 1 000 – 550 = 450 фунтов стерлингов. Начиная с момента времени $t_1 = ¼$ начисление процентов осуществляется уже на эту сумму.

С момента времени $t_1 = ¼$ по момент времени $t_2 = ½$ на сумму долга S_1 было начислено 20% · (½ – ¼) · 450 = 22,5 фунтов стерлингов процентных денег. Второй частичный платеж (10 фунтов) меньше, чем эта сумма, поэтому он полностью присоединяется к третьему частичному платежу. Величина задолженности остается той же: $S_2 = S_1$.

С момента времени t1= ¼ по момент времени t3 = ¾ на задолженность S_1 было начислено 20% · (¾ – ¼) · 450 = 45 фунтов стерлингов процентных денег. Второй и третий частичный платеж в сумме (10 + 300 = 310 фунтов) превосходят эту величину, поэтому они идут на погашение процентов (45 фунтов) и на уменьшение основного долга (310 – 45 = 265 фунтов). Значит, после внесения этих платежей размер задолженности заемщика составит S_3 = 450 – 265 = 185 фунтов стерлингов. *Формально складывать суммы* 10 *и* 300 *не принято в финансовой математике, поскольку они относятся к разным периодам, однако в данном случае как сумма накопления 10 фунтов стерлингов не рассматривается.*

Таким образом, за 3 месяца (¼ года) до окончания срока ссуды заемщик должен вернуть кредитору лишь 185 фунтов. За оставшееся время на эту сумму будет начислено 20% · ¼ · 185 = 9,25 фунтов стерлингов процентных денег. Следовательно, искомый заключительный платеж составляет A_4 = 185 + 9,25 = 194,25 фунтов.

Второй способ. Вычисляем остаток по формуле сложных процентов с возможностью реинвестирования:

$$S_3 = 2000 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot 0{,}0822)\text{^}2 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot 0{,}0849) -$$
$$- 192 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot 0{,}0822) \cdot (1 + 0{,}15 \cdot 0{,}0849) -$$
$$- 190 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot 0{,}0849) - 188 \approx 1498{,}46 \text{ евро.}$$
$$A_4 = 1000(1 + 0{,}2 \cdot ¼)(1 + 0{,}2 \cdot ½)(1 + 0{,}2 \cdot ¼) -$$
$$600(1 + 0{,}2 \cdot ½)(1 + 0{,}2 \cdot ¼) -$$
$$- 310 \cdot (1 + 0{,}2 \cdot ¼) = 194{,}25 \text{ фунтов.}$$

Обратите внимание: всего заемщиком было выплачено

600 + 10 + 300 + 194,25 = 1 104,25 фунтов стерлингов.

Если бы речь шла о простой ссуде, т.е. если бы заемщику пришлось возвращать долг одним платежом через год после начала сделки, то он бы заплатил 1 000 + 20% · 1 · 1 000 = 1 200 фунтов. Видно, что сумма в первом случае заметно меньше. Это объясняется тем, что часть основного долга, на который начисляются проценты, была возвращена кредитору еще до окончания ссудной операции.

Пример 1.11. (коммерческое правило). Рассмотрим ссуду размером 1 000 фунтов стерлингов Соединенного Королевства, выданную на год под простую процентную ставку i = 20%. До окончания ссудной операции было сделано три частичных платежа:

A_1 = 600 фунтов стерлингов через 3 месяца (t1 = ¼) после начала сделки;

A_2 = 10 фунтов стерлингов через полгода (t2 = ½) после начала сделки;

A_3 = 300 фунтов стерлингов через 9 месяцев (t3 = ¾) после начала сделки.

Согласно принципу правила торговца, проценты начисляются:

На сумму основного долга S_0 = 1000 фунтов стерлингов в течение всего срока ссуды итоговая задолженность составляет:

1000 + 20% · 1 · 1000 = 1200 фунтов.

На первый частичный платеж A_1 = 600 фунтов стерлингов, сделанный в момент времени $t_1 = ¼$, в течение девяти месяцев (сумма платежа с начисленными процентами составляет 600 + 20% · ¾ · 600 = 690 фунтов).

На второй частичный платеж A_2 = 10 фунтов стерлингов, сделанный в момент времени $t_2 = ½$, в течение полугода (сумма платежа с начисленными процентами составляет 10 + 20% · ½ · 10 = 11 фунтов).

На третий частичный платеж A3 = 300 фунтов стерлингов, сделанный в момент времени $t_3 = ¾$, в течение трех месяцев (сумма платежа с начисленными процентами составляет 300 + 20% · ¼ · 300 = 315 фунтов).

Сумма всех частичных платежей с начисленными на них процентами равна 690 + 11 + 315 = 1 016 фунтов стерлингов. Последний (погашающий) платеж A4 равен разности между величиной итоговой задолженности (1 200 фунтов стерлингов) и этой суммой и составляет 1 200 – 1 016 = 184 фунта стерлингов.

Задание. Для примеров 1.10, 1.11 рассчитайте эффективные ставки, используя функции ЧИСТВНДОХ (Excel) или XIRR (OpenOffice.Calk). Сделайте выводы.

Перейдем к формализации рассмотренных правил вычисления остатка по счету. Будем рассматривать общий случай – ссуду размером S0, выданную на срок T лет под простую процентную ставку i, которая погашается частичными платежами

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

в моменты времени

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

соответственно, причем $t_n = T$. Обозначим промежутки времени между датами внесения платежей следующим образом:

$$\tau_1 = t_1,\ \tau_2 = t_2 - t_1,\ \ldots,\ \tau_n = T - t_{n-1}.$$

Будем также предполагать, что все частичные платежи достаточно большие по размеру и идут на погашение начисленных процентов и (возможно) основного долга, а не присоединяются к последующим платежам.

Утверждение 1.1. При использовании актуарного метода после внесения частичного платежа A_k $(1 \le k \le n)$ сумма основного долга S_k, служащая базой для начисления процентов в последующих периодах, задается формулой:

$$S_k = S_0 \prod_{l=1}^{k}(1 + i\tau_l) - \sum_{l=1}^{k-1} A_l \prod_{j=l+1}^{k}(1 + i\tau_j) - A_k\,. \qquad (1.16)$$

Доказательство (по методу математической индукции). Очевидно, что после внесения первого частичного платежа сумма основного долга станет равной

$$S_1 = (1 + i\,\tau_1)\,S_0 - A_1\,,$$

то есть для $k = 1$ формула (1.16) справедлива.

Предположим теперь, что она выполняется для некоторого $k < n$. Рассмотрим частичный платеж с номером $k+1$. Ясно, что после его внесения сумма основного долга станет равной

$$S_{k+1} = (1 + i\,\tau_{k+1})\,S_k - A_{k+1}.$$

Так как по предположению для S_k выполняется соотношение (1.16), то

$$S_{k+1} = (1 + i\tau_{k+1}) \cdot \left[S_0 \cdot \prod_{l=1}^{k}(1 + i\tau_l) - \sum_{l=1}^{k} A_l \cdot \prod_{j=l+1}^{k}(1 + i\tau_j) \right] - A_{k+1} =$$

$$= S_0 \cdot \prod_{l=1}^{k+1}(1 + i\tau_l) - \sum_{l=1}^{k} A_l \cdot \prod_{j=l+1}^{k+1}(1 + i\tau_j) - A_{k+1}\,.$$

Тем самым доказано утверждение для номера $k+1$. Значит, в силу метода математической индукции, утверждение можно считать доказанным для любого $1 \le k \le n$.

Формула (1.15) помимо того, что она самодостаточна и замечательна сама по себе, может быть использована для нахождения размера платежа с номером k, если известны размеры всех предыдущих платежей. В частности, так как $S_n = 0$, то для заключительного платежа справедлива формула:

$$A_n \overset{S_n=0}{=} S_0 \prod_{l=1}^{n}(1 + i\tau_l) - \sum_{l=1}^{n-1} A_l \prod_{j=l+1}^{n}(1 + i\tau_j)\,. \qquad (1.17)$$

Утверждение 1.2. При использовании коммерческого метода после внесения частичного платежа A_k $(1 \le k \le n)$ сумма основного долга S_k, служащая базой для начисления процентов в последующих периодах, задается формулой:

$$S_k = S_0(1 + it_k) - \sum_{l=1}^{k-1} A_l(1 + i(t_k - t_l)) - A_k\,,\ 1 \le k \le n,$$

$$\tau_1 = t_1,\ \tau_1 = t_2 - t_1,\ \ldots, \tau_n = t_n - t_{n-1},\ T = t_n\,.$$

Коммерческая модель использует расчеты по простым процентам, и утверждение 1.2 вполне очевидно [8]. По коммерческому правилу, начисленные проценты относятся только к основной сумме, и учитываются все погасительные платежи.

Самостоятельное задание. Выполните расчеты для примера 1.11 по формуле (1.17).

1.3.3. Консолидированные платежи

Операция «приведения» денежных сумм к определенному моменту времени используется для сопоставления различных платежей при изменении сроков их погашения, их объединении и т.п.

Пусть платежи $S_1, S_2, \ldots, S_m$ со сроками уплаты этих сумм, соответственно, $T_1, T_2, \ldots, T_m$ заменяются одним в сумме S и сроком T. Пусть r – годовая процентная ставка по сложным процентам (считаем, что в течение всего срока сделки уровень процентной ставки сохраняется). Рассмотрим две задачи: во-первых, пусть дан срок Т и требуется найти сумму S; во-вторых, задана сумма консолидированного платежа и требуется определить, к какому сроку такая сумма накопится. Первая задача решается очень просто: приводя денежные потоки $S_i, i \in 1:m$ к моменту T, можно найти их сумму, это и будет S:

$$S = \sum_{\substack{i=1,\\ T \ge T_i}}^{m} S_i \cdot (1 + r)^{T - T_i} + \sum_{\substack{i=1,\\ T < T_i}}^{m} \frac{S_i}{(1 + r)^{T_i - T}}\,,$$

откуда получаем следующую формулу:

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i \cdot (1 + r)^{T - T_i}\,. \qquad (1.14)$$

Пример 1.12. В качестве оплаты за каждую из трех партий товара предприятие A получило от предприятия B вексель с процентной ставкой 25%

годовых, содержащий обязательство погасить сумму 1, 2 и 3 млн руб., соответственно через 3, 5 и 6 лет. Эти векселя заменяются одним векселем с процентной ставкой 25% и сроком на 4,5 года. На какую сумму должен быть выписан новый вексель, если в расчетах используется схема сложных процентов?

Решение. Найдем наращенную стоимость каждого из трех векселей через 4,5 года с момента выписки:

$S_1(4{,}5) = 1 \cdot (1 + 0{,}25)^{1{,}5} = 1{,}398$ млн руб. – для 1-го векселя;

$S_2(4{,}5) = 2 \cdot (1 + 0{,}25)^{-0{,}5} = 1{,}7889$ млн руб. – для 2-го векселя;

$S_3(4{,}5) = 3 \cdot (1 + 0{,}25)^{-1{,}5} = 2{,}1467$ млн руб. – для 3-го векселя.

Эти платежи относятся к одному моменту времени, значит, можно найти их сумму: $S(4{,}5) = S_1(4{,}5) + S_2(4{,}5) + S_3(4{,}5) = 5{,}3336$ млн руб. Итак, в новом векселе должно быть отражено обязательство выплатить 5,3336 млн руб. через 4,5 года.

ПРИКЛАДНОЙ АСПЕКТ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

2.1. Учет инфляции

Инфляция – это снижение реальной покупательной способности денег.

Пусть $S(T)$ – наращенная сумма денег, измеряемая по номиналу, $C(T)$ – наращенная сумма денег с учетом их обесценения, h_t – годовой темп инфляции в году t, J_p – индекс цен за период T. Указанные величины связаны соотношением:

$$C(T) = \frac{S(T)}{J_p}, \qquad (2.1)$$

где

$$J_p = \prod_{t=1}^{T} (1 + h_t). \qquad (2.2)$$

Пример 2.1. Через 3 года г-н X планирует получить страховку 100 тыс. руб. (страхование на дожитие). Согласно прогнозам, темпы инфляции за эти годы составят 15%, 20% и 18% соответственно. Оцените сумму к получению с учетом ее обесценения.

Решение. В нашем случае $T = 3$, $S(T) = 100$ тыс. руб., $h_1 = 0{,}15$, $h_2 = 0{,}2$, $h_3 = 0{,}18$. Применяя формулы (2.1), (2.2), считаем:

$$C(3) = \frac{100}{1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}18} = \frac{100}{1{,}6284} \text{ тыс. руб.} = 61{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

В условиях инфляции объявленная годовая процентная ставка должна учитывать компенсацию потерь, связанных с обесценением денег. Такая ставка носит название брутто-ставка.

Пусть темп инфляции в течение T лет постоянен: $h_t = h$, $t = \overline{1,T}$, r_b – брутто-ставка, r – реальная процентная ставка. При сложных процентах имеем $C(T) = S(0)(1+r)^T$, $S(T) = S(0)(1+r_b)^T$. Учитывая (1.14) и (1.15), получаем равенство $S(0)(1+r_b)^T = S(0)(1+r)^T \cdot (1+h)^T$, откуда находим:

$$r_b = r + h + r \cdot h. \qquad (2.3)$$

Заметим, что брутто-ставка не просто является суммой реальной ставки и темпа инфляции, а еще их произведения:

$$r = \frac{1 + r_b}{1 + h} - 1. \qquad (2.4)$$

Пример 2.2. Решено вложить 1 млн руб. в банк на 2 года под 30% годовых. Согласно прогнозу Минфина годовой темп инфляции сохранится на уровне 15%. Какова наращенная сумма с учетом ее обесценения? Определите реальную годовую процентную ставку (схема – сложные проценты).

Решение. В нашем случае $r_b = 0{,}3$, $h = 0{,}15$, $S(0) = 1$ млн руб. По формуле (1.17) находим реальную процентную ставку $r = \frac{1{,}3}{1{,}15} - 1 = 0{,}13$ [13%]. Тогда $C(2) = S(0) \cdot (1 + r)^2 = 1{,}278$ млн руб.

Пример 2.3. Для примера 2.1 рассчитать эквивалентный постоянный годовой темп инфляции и сравнить его со средним.

Решение. Из соотношения $J_p = (1 + h)^3 = 1{,}6284$ находим $h = 1{,}6284^{1/3} - 1 \approx 0{,}1765$ [17,65%]. Средний темп инфляции составляет $\bar{h} = (0{,}15 + 0{,}18 + 0{,}2)/3 \approx 0{,}1767$ [17,67%]. Таким образом, использование среднего арифметического темпов для вычисления индекса цен завысит его реальную величину.

2.2. Учет налогообложения процентных доходов

Сформулируем следующие вопросы:

- какие процентные доходы по депозитам физических лиц попадают под налогообложение?
- какова процентная ставка налога?
- как рассчитывается налог из процентных доходов по депозитам физических лиц?
- кто является налоговым агентом?
- как определяется налоговая база, если вкладчик имеет несколько депозитов, процентные доходы по которым попадают под налогообложение?

Следуя Налоговому кодексу (НК) РФ (ст. 214, 217, 224, 226), отметим следующие факты.

1. Под налогообложение процентных доходов попадают доходы:

- по рублевым депозитам – если процентная ставка по депозиту превышает ставку рефинансирования. Например, когда процентная ставка по депозиту – 12 %, а ставка рефинансирования – только 10,75% (размер ставки рефинансирования 10,75 % установлен Указанием Банка России от 07.08.2009 № 2270-У «О размере ставки рефинансирования Банка России» с 10 августа 2009г.);
- по валютным депозитам – если ставка по валютному депозиту превышает 9% «годовых».

2. Ставка налога на процентные доходы по вкладам составляет 35%.

3. Налог по депозитам физических лиц рассчитывается из процентных доходов, которые получаются сверх определенных законом норм.

4. Налоговыми агентами по исчислению, удержанию и перечислению в бюджет налога на доходы (проценты) физических лиц по депозитам являются банки.

5. Определение налоговой базы для исчисления налога на процентные доходы по рублевым и валютным вкладам производится по каждому вкладу отдельно и рассчитывается налоговыми агентами отдельно по каждой сумме дохода, начисленного налогоплательщику.

Устанавливаемые ранее в НК РФ льготы по налогообложению для пенсионеров в виде ставки налогообложения в размере 13% по пенсионным депозитам, вносимым на срок не менее 6 месяцев, теперь отменены.

2.3. Ставка рефинансирования

Ставка рефинансирования (*Federal funds rate*) – размер процентов в годовом исчислении, подлежащий уплате центральному банку (ЦБ) страны за кредиты, предоставленные кредитным организациям. Эти кредиты являются рефинансированием нехватки финансовых ресурсов. Через такие кредиты обеспечивается регулирование ликвидности банковской системы при недостатке у кредитных организаций средств для осуществления кредитования клиентов и выполнения принятых на себя обязательств. Обычно под ставкой рефинансирования подразумевают ставку кредитования на одну ночь («*овернайт*», предоставляется кредитной организации в конце дня в сумме непогашенного внутридневного кредита), размер которой наибольший по сравнению с установленными ставками кредитования на другие сроки.

В статье 40 Федерального закона № 86-ФЗ «О центральном банке Российской Федерации (Банке России)» от 10 июля 2002 г. определено, что под рефинансированием понимается кредитование Банком России кредитных организаций.

Ставка рефинансирования является инструментом денежно-кредитного регулирования, с помощью которого ЦБ воздействует на ставки межбанковского рынка, а также ставки по депозитам юридических и физических лиц и кредитам, предоставляемым им кредитными организациями.

В зарубежной практике часто используется термин **«Учетная ставка»**.

Другие определения ставки рефинансирования Центрального банка:

1)процентная ставка, применяемая Центральным банком в его операциях с коммерческими банками и другими кредитными институтами при покупке государственных краткосрочных обязательств и переучете частных коммерческих векселей (Современный экономический словарь);

2)размер платежа, производимого клиентами банка при погашении старой задолженности по кредитам путем их замены новыми кредитами (Новый экономический и юридический словарь);

3)ставка, под которую Центральный банк дает кредиты коммерческим банкам;

4)ставка рефинансирования является одной из процентных ставок, которые центральный банк использует при предоставлении кредитов банкам в порядке рефинансирования.

Особенности ставки рефинансирования в России

В России ставка рефинансирования помимо выполнения функции экономического регулятора, как в других экономиках, выступает в качестве фискальной меры (для расчета налоговых и других штрафов).

Применение ставки рефинансирования

Налогообложение:

• проценты по рублевым банковским вкладам, облагаемые НДФЛ. Налогом облагаются проценты в размере более ставки рефинансирования, действовавшей в течение периода, за который они начислены, плюс 5 процентных пунктов;

• пени за просрочку уплаты налога или сбора. Пени равны 1/300 действующей ставки рефинансирования за каждый день просрочки:

• расчет налоговой базы при получении налогоплательщиком дохода в виде материальной выгоды от экономии на процентах за пользование заемными (кредитными) средствами. Налоговая база определяется как превышение суммы процентов, выраженной в рублях, исчисленной исходя из двух третей ставки рефинансирования, действующей на момент получения дохода, над суммой процентов, исчисленной исходя из условий договора;

• при отсутствии в *договоре займа* условий о размере процентов, их размер определяется ставкой банковского процента (ставкой рефинансирования) на день уплаты заемщиком суммы долга или его части.

Работодатель несет материальную ответственность перед работником. При нарушении работодателем установленного срока выплаты заработной платы, оплаты отпуска, выплат при увольнении и других выплат, причитающихся работнику, работодатель обязан выплатить их с уплатой процентов (денежной компенсации) в размере не ниже одной трехсотой действующей в это время ставки рефинансирования Центрального банка Российской Федерации от невыплаченных в срок сумм за каждый день задержки начиная со следующего дня после установленного срока выплаты по день фактического расчета включительно. Размер выплачиваемой работнику денежной компенсации может быть повышен коллективным договором или трудовым договором. Обязанность выплаты указанной денежной компенсации возникает независимо от наличия вины работодателя (Ст. 236 ТК РФ).

Изменение размера ставки рефинансирования ЦБР в 2008-2012 гг. выглядит следующим образом[1]:

Период действия	%	Нормативный документ
25 декабря 2011 г. –	8	Указание Банка России от 23.12.2011 № 2758-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
3 мая 2011 г. – 25 декабря 2011 г.	8,25	Указание Банка России от 29.04.2011 № 2618-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
28 февраля 2011 г. – 2 мая 2011 г.	8	Указание Банка России от 25.02.2011 № 2583-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
1 июня 2010 г. – 27 февраля 2011 г.	7,75	Указание Банка России от 31.05.2010 № 2450-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
30 апреля 2010 г. – 31 мая 2010 г.	8	Указание Банка России от 29.04.2010 № 2439-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
29 марта 2010 г. – 29 апреля 2010 г.	8,25	Указание Банка России от 26.03.2010 № 2415-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
24 февраля 2010 г. – 28 марта 2010 г.	8,5	Указание Банка России от 19.02.2010 № 2399-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
28 декабря 2009 г. –24 февраля 2010 г.	8,75	Указание Банка России от 25.12.2009 № 2369-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
25 ноября 2009 г. – 27 декабря 2009 г.	9	Указание Банка России от 24.11.2009 № 2336-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
30 октября 2009 г. – 24 ноября 2009 г.	9,5	Указание ЦБ РФ от 29.10.2009 № 2313-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
30 сентября 2009 г. – 29 октября 2009 г.	10	Указание ЦБ РФ от 29.09.2009 № 2299-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
15 сентября 2009 г. – 29 сентября 2009 г.	10,5	Указание ЦБ РФ от 14.09.2009 № 2287-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
10 августа 2009 г. – 14 сентября 2009 г.	10,75	Указание ЦБ РФ от 07.08.2009 № 2270-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
13 июля 2009 г. – 9 августа 2009 г.	11	Указание ЦБ РФ от 10.07.2009 № 2259-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
05 июня 2009 г. – 12 июля 2009 г.	11,5	Указание ЦБ РФ от 04.06.2009 № 2247-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
14 мая 2009 г. – 04 июня 2009 г.	12	Указание ЦБ РФ от 13.05.2009 № 2230-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
24 апреля 2009 г. – 13 мая 2009 г.	12,5	Указание ЦБ РФ от 23.04.2009 № 2222-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
1 декабря 2008 г. – 23 апреля 2009 г.	13	Указание ЦБ РФ от 28.11.2008 № 2135-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
12 ноября 2008 г. – 30 ноября 2008 г.	12	Указание ЦБ РФ от 11.11.2008 № 2123-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
14 июля 2008 г. – 11 ноября 2008 г.	11	Указание ЦБ РФ от 11.07.2008 № 2037-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
10 июня 2008 г. – 14 июля 2008 г.	10,75	Указание ЦБ РФ от 09.06.2008 № 2022-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»
29 апреля 2008 г. – 9 июня 2008 г.	10,5	Указание ЦБ РФ от 28.04.2008 № 1997-У «О размере ставки рефинансирования Банка России»

[1] Информация с сайта http://www.cbr.ru/statistics/credit_statistics/refinancing_rates.htm

С 1 января 2009 г. налоговая база в отношении процентных доходов, получаемых по вкладам в рублях, на основании новой редакции ст.214.2 НК РФ определяется как превышение суммы процентов, начисляемой в соответствии с условиями договора, над суммой процентов, рассчитанной исходя из ставки рефинансирования ЦБ РФ, увеличенной на пять процентных пунктов.

Пусть ставка налога составляет g процентов годовых, а $S(0)$ – сумма вклада, Т – срок вклада в годах, $\bar{r}$ – нормативная, необлагаемая налогом ставка (например, текущая ставка рефинансирования по рублевым вкладам плюс 5%). Если по вкладу начисляются простые проценты по годовой ставке r, то после уплаты налога у вкладчика останется денежная сумма $C(T)$, определяемая следующим образом:

$$C(T)=S(0)(1+Tr)-gS(0)(Tr-T\bar{r})=S(0)\left(1+T\left(r-(r-\bar{r})g\right)\right).$$

Таким образом, эта операция эквивалентна депонированию средств на тот же срок по простым процентам по ставке $r(1-g)+\bar{r}g$ годовых без налоговых платежей.

При долгосрочных и среднесрочных операциях обычно начисляются сложные проценты. Для упрощения рассмотрим вариант, когда сложные проценты начисляются ежегодно. Тогда налоги изымаются либо в конце срока сделки за весь период, либо ежегодно.

Рассмотрим случай, когда налоги изымаются в конце срока сделки за весь период. Сумма после уплата налога составит $C(T)$. Определим размер этой суммы:

$$C(T)=S(0)(1+r)^T-S(0)\left((1+r)^T-(1+\bar{r})^T\right)g=S(0)\left((1+r)^T(1-g)-(1+\bar{r})^T g\right).$$

Пример 2.4. Пусть ставка налога 30 %, ставка рефинансирования 8 %, ставка по вкладу 10 % годовых, условия начисления – в конце срока, срок вклада 1 год. Сумма вклада 100 000 р. Вычислить сумму налога и оставшуюся после уплата налога сумму.

Решение. Поскольку 8% + 5% = 13% > 10%, то процентные доходы по данному вкладу налогом не облагаются, у вкладчика к концу года будет сумма 110 000 р.

Пример 2.5. Пусть ставка налога 30 %, ставка рефинансирования 8 %, ставка по вкладу 14 % годовых, условия начисления – в конце срока, срок вклада 1 год. Сумма вклада 100 000 р. Вычислить сумму налога и оставшуюся после уплата налога сумму.

Решение. Поскольку 8% + 5% = 13% < 14%, то процентные доходы по данному вкладу облагаются налогом, вычислим сумму, выплаченную в качестве налога:

$$gS(0)(Tr-T\bar{r})=30\%\cdot 100000\ p.\cdot(14\%-13\%)=300\ p.$$

$$C(T)=S(0)(1+Tr)-gS(0)(Tr-T\bar{r})=114\,000\ p.-300\ p.=113\,700\ p.$$

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

3.1. Понятие финансового потока. Временная диаграмма

С разовыми платежами человек имеет дело, если совершает покупки, оплачивает услуги или получает бонусы. В большинстве экономических процессов участники имеют дело с серией однородных платежей, образующих финансовый поток. Финансовые потоки возникают практически во всех сферах экономических отношений. Так, заработная плата, получаемая, как правило, достаточно регулярно, суммы оплаты коммунальных платежей, получение дивидендов по акциям, возвратные суммы по кредиту, инвестирование средств в производство с последующим получением прибыли, налоговые, арендные платежи и проч., – примеры финансовых потоков. Нужно иметь в виду, что положительные финансовые потоки как правило, связаны с получением денег, а отрицательные – оттоком, однако при смене стороны рассмотрения поток меняет знак. Часто финансовый поток включает как положительные, так и отрицательные платежи, однако если он связан с инвестированием средств, первая сумма имеет отрицательный знак, а последняя – положительный.

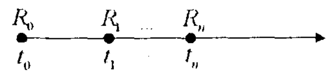
Каждый финансовый поток представляет собой совокупность однородных элементов – элементов финансового потока. Элемент финансового потока – это единичное перечисление (перераспределение) денежных средств, относящихся к соответствующему финансовому потоку. Элемент потока задается двумя основными параметрами – величиной (стоимостью) и временем. Абсолютная величина элемента финансового потока соответствует сумме перемещаемых денежных средств. Однако время в финансовых вычислениях влияет на величину потока.

Поток платежей – это последовательность *величин* самих *платежей* (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Поток платежей можно отобразить в таблице:

t_k	t_0	t_1	...	t_n	...
R_k	R_0	R_1	...	R_n	...

или графически, в виде *временной диаграммы*:



Здесь R_k – величины платежей, а t_k – моменты совершения этих платежей.

Поток платежей можно представить как векторную последовательность $\{(R_k, t_k)\}$ платежей R_k и моментов времени t_k, к которым платежи относятся. В качестве начального момента времени часто удобно брать $t_0 = 0$.

Рассмотрим конечный поток платежей $\{(R_k, t_k)\}_{k=\overline{1,n}}$. Пусть, r_k, $k = \overline{1,n}$ – годовая ставка по сложным процентам для периода $[t_{k-1}; t_k]$ данного потока платежей.

Величиной потока в момент времени t_k называется сумма платежей потока, дисконтированных или наращенных к этому моменту времени. Если поток конечный и R_n – последний платеж, то величина потока подсчитывается по формуле:

$$S(t_k) = \sum_{i=0}^{k-1} R_i \prod_{j=i}^{k-1} (1 + r_{j+1})^{t_{j+1} - t_j} + R_k + \sum_{i=k+1}^{n} R_i \prod_{j=k+1}^{i} (1 + r_j)^{t_{j-1} - t_j} \qquad (3.1)$$

Если все ставки r_k, $k = \overline{1,n}$ одинаковы, то их общее значение r называется *ставкой приведения (ставкой дисконтирования)*. В таком случае формула (3.1) упрощается:

$$S(t_k) = \sum_{i=0}^{n} R_i (1 + r)^{t_k - t_i}. \qquad (3.2)$$

Величина $S(t_0)$ называется *современной (начальной) величиной потока*, $S(t_n)$ – *конечной (наращенной) величиной потока*.

Будем использовать поток, для которого $t_k = k$, $k = \overline{1,n}$.

Пример 3.1. Подсчитать современную и конечную величины при $r = 10\%$ для потока, заданного следующей таблицей:

t_k	0	1	2	3
R_k	–	– 2000	1000	2000

Решение. Воспользуемся формулой (3.2), тогда:

$S(0) = -2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-1} + 1000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-2} + 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-3} = 511$,

$S(3) = S(0) \cdot (1 + r)^3 = 680$.

Пример 3.2. По схеме кредитования, рассчитанной на 5 лет, размер предоставляемой в долг суммы составлял 10, 20, 30, 40 и 50 тыс. руб. соответственно, причем процентная ставка за эти 5 лет изменялась следующим образом: 15%, 12%, 10%, 8%, 10%. Сколько денег нужно вернуть через 5 лет?

Решение. Воспользуемся формулой (3.1):

$$S(5) = 10 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 + 20 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 + 30 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 +$$
$$+ 40 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 + 50 \cdot 1{,}1 = 16{,}83 + 29{,}27 + 39{,}2 + 47{,}52 + 55 = 187{,}82 \text{ тыс.руб.}$$

3.2. Вычисление величины финансового потока, имеющего характер ренты

Поток положительных платежей с постоянными промежутками времени между ними называется *рентой*.

Рента с одинаковыми платежами в каждый период времени носит название *аннуитет*. Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то аннуитет носит название *постнумерандо*, в начале – *пренумерандо*.

Рассмотрим аннуитет, считая, что процентная ставка r постоянна во времени. Отдельно рассматривать такие потоки платежей имеет смысл в виду возможности применения удобных компактных формул для расчета величин аннуитетных потоков в каждый момент времени. В данном разделе кроме традиционного простого аннуитета будет рассмотрен также дробный аннуитет и линейная рента.

Линейной рентой назовем ренту, платежи которой растут по линейному закону.

Простой аннуитет

Пусть денежные поступления в размере R происходят ежегодно в течение n лет, причем $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, ..., $t_n = n$. Найдем современную и наращенную величины для аннуитета постнумерандо:

$$\bar{S}(0) = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^n}; \qquad \bar{S}(n) = \bar{S}(0)(1+r)^n. \qquad (3.3)$$

Пользуясь формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии с первым компонентом $R/(1+r)$ и знаменателем $1/(1+r)$, после элементарных преобразований получим:

$$\bar{S}(0) = \frac{R \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n}; \qquad \bar{S}(n) = \frac{R \cdot ((1+r)^n - 1)}{r}. \qquad (3.4)$$

Аналогичные формулы для аннуитета пренумерандо можно получить из (3.4), учитывая, что:

$$\underline{S}(0) = \bar{S}(0)(1+r); \qquad \underline{S}(n) = \bar{S}(n)(1+r). \qquad (3.5)$$

Тогда

$$\underline{S}(0)=\frac{R\cdot((1+r)^n-1)}{r(1+r)^{n-1}};\qquad \underline{S}(n)=\frac{R((1+r)^n-1)}{r}\cdot(1+r). \qquad (3.6)$$

Замечание. Эти формулы могут применяться не только для оценки годовых рент, но и квартальных, полугодовых, ежемесячных и т.д., но тогда суммы и ставки должны соответствовать рассматриваемому периоду ренты.

Обобщением указанных формул является дробный аннуитет, рассмотренный ниже.

Для выполнения расчетов по этим формулам в MSExcel существуют функции ПС() и БС() с соответствующим набором аргументов.

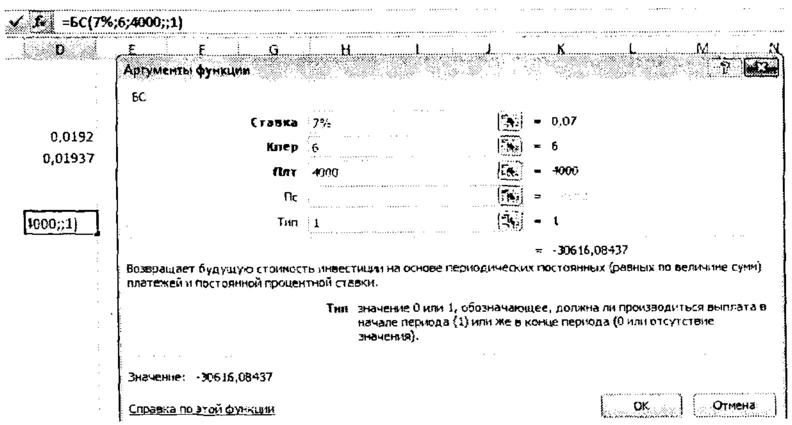
Применение аннуитета постнумерандо и пренумерандо целесообразно для упорядочения экономических отношений. Так, аннуитет пренумерандо обычно относится к процессам, связанным с вложением или расходованием денег по целевому назначению, к авансовым и арендным платежам, а аннуитет постнумерандо – к получению доходов, оплате коммунальных услуг, услуг связи, налогов, процентов и т.п.

Пример 3.3. Решено в течение 6 лет ежегодно вносить в банк 4 000 дол. по схеме пренумерандо с начислением сложных процентов 7% годовых. Чему равна сумма к получению в конце периода?

Решение. Воспользуемся формулами (3.6):

$$\underline{S}(6)=4000\cdot\frac{1{,}07^6-1}{0{,}07}\cdot1{,}07=30\,616\text{ дол.}$$

Для вычисления будущей стоимости аннуитета в MSExcel существует финансовая функция БС(ставка;кпер;плт;пс;тип):



Результат: -30 616,08р., знак «-» говорит о полном возврате денег вкладчику, поскольку третий аргумент этой функции пропущен, а суммы возврата задолженности 4 000 дол. Имеют знаки «+».

Аналогично производятся вычисления приведенной стоимости аннуитета. Для вычисления приведенной стоимости аннуитета удобно использовать функцию MSExcel ПС(ставка;кпер;плт;пс;тип).

Замечание. В свободно распространяемых электронных таблицах (например, OpenOffice.Calc) аналогичные функции обычно имеют названия FV() («future value») и PV() («present value»).

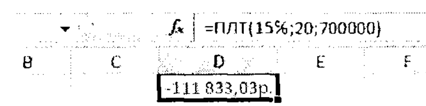
Рассмотрим на примере применение еще одной удобной финансовой функции ПЛТ(ставка;кпер;пс;бс;тип).

Пример 3.4. Г-н X инвестировал 700 000 дол. в пенсионный контракт. Страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно (в конце года) в течение 20 лет, исходя из годовой ставки по сложным процентам 15%. Какую сумму будет получать ежегодно г-н X ?

Решение. В нашем случае $\bar{S}(0)=700\,000$ дол., $r=0{,}15$, $n=20$. Из формулы (3.4) (слева) выразим ежегодную сумму выплаты R г-ну X:

$$R=700\,000\cdot\frac{0{,}15\cdot1{,}15^{20}}{1{,}15^{20}-1}=111\ 833\text{ дол.}$$

Для вычисления данной суммы в MSExcel применяем финансовую функцию ПЛТ():



Знак «-» означает, что направления использования средств противоположно оплате 700 000 дол.

Дробный аннуитет

Рассмотрим поток платежей постнумерандо, которые равными суммами выплачиваются p раз в году через равные интервалы. Если суммарный годовой платеж равен R, то единичный платеж равен $R_p=\frac{R}{p}$. Гораздо чаще известен именно дробный платеж R_p, поэтому специально вычислять его не нужно. Предположим, что сложные проценты начисляются m раз в году, также через равные интервалы, годовая ставка (по сложным процентам) r. Подсчитаем наращенную сумму такого потока через n лет:

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n\cdot p}\left(R_p\right)\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\left(n-\frac{i}{p}\right)\cdot m}=R_p\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}\sum_{i=1}^{n\cdot p}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{i\cdot m}{p}}}.$$

Используя формулу суммы первых $n\cdot p$ членов геометрической прогрессии с первым компонентом $1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, знаменателем $1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, после элементарных преобразований получим:

$$\bar{S}(n)=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (3.7)$$

Современную величину потока получаем из (3.7):

$$\bar{S}(0)=\frac{S(n)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}\cdot\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}. \qquad (3.8)$$

Как было замечено выше, при m=p эти формулы ничего нового по сравнению (3.4) по сути не дают. Именно данный случай чаще всего используется на практике.

Пример 3.5. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру в конце каждого года 500 дол. Деньги поступают на специальный счет и на них каждые полгода начисляются сложные проценты, исходя из годовой ставки 4%. Сколько денег накопится на счете через 5 лет?

Решение. Данные для расчета таковы: $p=1$, $m=2$, $r=0{,}04$, $R=500$ дол. Воспользуемся формулой (3.7):

$$\bar{S}(5)=\frac{500}{1}\cdot\frac{(1+0{,}04/2)^{10}-1}{(1+0{,}04/2)^{2}-1}.$$

Произведя вычисления, получим сумму, которая накопится на счете фермера через 5 лет: $\bar{S}(5)=2710{,}3$ дол.

Пример 3.6. Ежемесячно в течение двух лет студенту перечисляется на пластиковую карту стипендия 600 руб. Деньги не снимаются. Затем один год студент стипендию не получает. Следующие два года перечисляется ежемесячно по 800 руб. Сколько денег накопится на карте через 5 лет, если годовая ставка по сложным процентам составляет 2%.

Решение. Расчет требуемой суммы ведется по формуле (3.7), $p=12$, $m=1$:

$$600\cdot\frac{1{,}02^2-1}{1{,}02^{\frac{1}{12}}-1}\cdot 1{,}02^3+800\cdot\frac{1{,}02^2-1}{1{,}02^{\frac{1}{12}}-1}=35\,178 \text{ руб.}$$

Можно провести сравнение этой суммы с суммой, которая накопилась бы, если студент снимал стипендию и хранил наличными – 33 600 руб.

Пример 3.7. По договору о кредитной линии с банком предприниматель ежемесячно (в первых числах месяца) получает по 10 тыс. руб. в течение полутора лет. В конце срока возвращается сумма долга и начисляются сложные проценты 1,1 % ежемесячно. Какая сумма подлежит возврату?

Решение. Условно считая месяц «годом», применяем формулу (2.6):

$$\underline{S}(18\text{ мес.})=\frac{10\cdot((1{,}011)^{18}-1)}{0{,}011}\cdot 1{,}011\approx 200 \text{ тыс.руб.}$$

Задание. Для примеров 3.5-3.7 выполните расчеты с использованием электронной таблицы (если Вы применяете MSExcel, воспользуйтесь функциями ПС() и БС()).

Монотонная (линейная) рента

Рассмотрим ренту, платежи по которой поступают в конце каждого временного промежутка (постнумерандо), причем изменение величин платежей происходит во времени по закону $\mathrm{R}+\beta\cdot\mathrm{t}$, $t=\overline{0,n-1}$. Если ставка приведения постоянна на уровне r, то современная величина такой ренты рассчитывается по формуле:

$$\begin{aligned}
S(0)&=\frac{R}{1+r}+\frac{R+\beta}{(1+r)^2}+\frac{R+2\beta}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{R+(n-1)\beta}{(1+r)^n}=\\
&=\frac{R}{1+r}+\frac{R}{(1+r)^2}+\frac{R}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{R}{(1+r)^n}+\\
&+\frac{\beta}{(1+\mathrm{r})^n}\left((1+r)^{n-2}+2(1+r)^{n-3}+\ldots+(n-1)\right)=\\
&=\frac{R\cdot((1+r)^n-1)}{r\cdot(1+r)^n}+\\
&+\frac{\beta}{(1+\mathrm{r})^n}\left(\left\{(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+1\right\}+\right.\\
&\left.+\left\{(1+r)^{n-3}+(1+r)^{n-4}+\ldots+1\right\}+\left\{(1+r)+1\right\}+1\right).
\end{aligned} \qquad (3.9)$$

Пользуясь формулой суммы конечного числа членов геометрической прогрессией, имеем:

$$(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+1=\frac{(1+r)^{n-1}-1}{r},$$

$$(1+r)^{n-3}+(1+r)^{n-4}+\ldots+1=\frac{(1+r)^{n-2}-1}{r},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$(1+r)+1=\frac{(1+r)^{2}-1}{r},$$

$$1=\frac{(1+r)-1}{r}.$$

Подставим полученные выражения в (3.9):

$$S(0)=\frac{R\cdot((1+r)^{n}-1)}{r\cdot(1+r)^{n}}+$$

$$+\frac{\beta}{r\cdot(1+r)^{n}}\left(\left\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\ldots+(1+r)^{2}+(1+r)\right\}-(n-1)\right)=$$

$$=\frac{R\cdot((1+r)^{n}-1)}{r\cdot(1+r)^{n}}+\frac{\beta}{r\cdot(1+r)^{n}}\left(\frac{(1+r)\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r}-(n-1)\right).$$

Окончательно получаем:

$$S(0)=\frac{R\cdot((1+r)^{n}-1)}{r\cdot(1+r)^{n}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^{2}\cdot(1+r)^{n}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r\cdot(1+r)^{n}}. \tag{3.10}$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$S(n)=\frac{R\cdot((1+r)^{n}-1)}{r}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^{2}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r}. \tag{3.11}$$

Если линейная рента имеет форму пренумерандо, то получаем:

$$S(0)=\frac{R\cdot((1+r)^{n}-1)}{r\cdot(1+r)^{n-1}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^{2}\cdot(1+r)^{n-1}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r\cdot(1+r)^{n-1}}. \tag{3.12}$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$S(n)=\left(\frac{R\cdot((1+r)^{n}-1)}{r}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^{2}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r}\right)\cdot(1+r). \tag{3.13}$$

Вечная рента

Под «вечной» годовой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограниченна. Наращенная величина такой ренты бесконечна, а современная величина, например для аннуитета постнумерандо, составляет:

$$S^{\infty}(0)=\frac{R}{r}. \tag{3.14}$$

Последняя формула получена из (3.4) путем предельного перехода при $n\to\infty$.

Пример 3.8. Бизнесмен арендовал виллу за 10 000 дол. в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке сложных процентов 5%?

Решение. Выкупная цена виллы есть современная величина всех будущих арендных платежей:

$$S^{\infty}(0)=R/r=10000/0{,}05=200000\ \text{дол.}$$

Несложно вычислить современную стоимость других видов ренты. Например, переходя к пределу при $n\to\infty$ в формуле (3.10), получим современную стоимость «линейного вечного» аннуитета постнумерандо:

$$S^{\infty}(0)=\frac{R}{r}+\frac{\beta}{r^{2}\cdot(1+r)}+\frac{\beta}{r\cdot(1+r)}=\frac{R}{r}+\frac{\beta(1+r)}{r^{2}\cdot(1+r)},$$

откуда получаем:

$$S^{\infty}(0)=\frac{R}{r}+\frac{\beta}{r^{2}}. \tag{3.15}$$

ФИНАНСОВО-КРЕДИТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

4.1. Кредитные расчеты

Все три термина: «заем», «кредит», «ссуда» означают предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности, платности, срочности. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется *кредитором*, кто берет – *заемщиком (дебитором)*. Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть кредит в размере D выдан на n лет под g сложных годовых процентов (эффективная ставка). Изменение обозначения процентной ставки несет смысловое значение, например, для банков, которые привлекают вклады, предлагая процентную ставку r, и кредитуют население по ставке g, причем обычно $r < g$. Ясно, что такое понимание кредитно-депозитных операций банка очень узко, но позволяет сформировать представление о так называемой банковской марже, которая в таком случае составит $g - r$ процентов.

4.2. Погашение долга одним платежом в конце срока

К концу n-го года наращенная сумма с величины D станет $D(1+g)^n$. Если предполагается погасить кредит одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

Пример 4.1. Занято 2 000 дол. на 8 лет под 10% годовых по сложным процентам. Если отдать этот заем одним платежом, каков размер этого платежа?

Решение. В нашем случае $D = 2\ 000$ дол., $g = 0{,}1$, $n = 8$; тогда искомая сумма к погашению составит $2\ 000 \cdot 1{,}1^8 = 4\ 288$ дол.

4.3. Погашение долга в рассрочку дифференцированными и аннуитетными платежами

Схемы погашения долга частями, с одной стороны, позволяют заемщику легче планировать свои расходы по обслуживанию долга, а с другой

– предоставляют кредитору возможность отслеживать регулярность возврата заемщиком причитающихся сумм и при добросовестном исполнении заемщиком платежей снизить риск невозврата кредита. Размер самого кредита называется *основным долгом*, а наращиваемый добавок – *процентными деньгами*. Указанные платежи дробятся. Обозначим через d_t расходы на погашение основного долга в конце года t, D_t – остаток основного долга на начало года t, Y_t – общие расходы по обслуживанию долга в конце года t. Тогда:

$$Y_t = D_t g + d_t, \qquad (4.1)$$

где $D_t g$ – процентные деньги;

$$D = d_1 + d_2 + \ldots + d_n. \qquad (4.2)$$

Для погашения основного долга частями используются, например, следующие схемы.

Схема А. Схема амортизации долга: дифференцированные погасительные платежи

Долг погашается последовательными равными суммами в конце каждого года, с ежегодной выплатой процентов на остаток долга. В этом случае:

$$d_t = d = const,\ d = D/n, \qquad (4.3)$$

$$D_t = D - (t-1)d, \qquad (4.4)$$

$$Y_t = (D - (t-1)d)g + d. \qquad (4.5)$$

Планом погашения задолженности называется совокупность данных по обслуживанию основной суммы долга, о процентных выплатах и остатках задолженности за каждый период (год) до момента его полного погашения. Наиболее удобный способ составления плана – таблица.

Пример 4.2. Выпущена облигация (долговая ценная бумага) номиналом 100 руб. с условием погашения последовательными равными суммами в течение 4 лет. Ежегодно выплачиваются также 20% годовых на остаток долга каждый. Составляем план погашения.

Решение. В нашем случае $n = 4$, $D = 100$ руб., процентная ставка $g = 0{,}2$. Вычисляем размер ежегодной выплаты по основному долгу, пользуясь формулой (4.3): $d = 100/4 = 25$ руб. План погашения составим в виде таблицы. Сразу ставим $D_1 = 100$ руб. и заполняем колонку (2). Строка $t+1$ колонки (1) получается вычитанием из строки t колонки (1) соответствующей строки колонки (2): $D_{t+1} = D_t - d$. Колонка (3) получается из колонки (1) умножением на 0,2. Колонка (4) – это сумма колонок (2) и (3).

Время, год	Остаток основного долга на начало года	Погашение основного долга в конце года t	Проценты к выплате в конце года t	Годовые расходы по обслуживанию долга на конец года t
t	D_t	$d_t = d$	$D_t g$	$Y_t = d + D_t g$
1	100	25	20	45
2	75	25	15	40
3	50	25	10	35
4	25	25	5	30
	(1)	(2)	(3)	(4)

Данная схема погашения долга имеет существенный недостаток: расходы по обслуживанию долга вначале выше, что часто является нежелательным для дебитора.

Дифференцированные платежи сначала большие, а к концу срока погашения кредита постепенно уменьшаются или наоборот.

Схема В. Схема амортизации долга: аннуитетные погасительные платежи

Погашение кредита равными срочными уплатами вместе с начисленными сложными процентами на непогашенный остаток.

Аннуитетными платежами называются равные платежи каждый период (месяц, год и т.п.). Независимо от того, в начале срока погашения кредита вы находитесь или в его конце, ежемесячно вы будете выплачивать одинаковую сумму.

Эта схема явно не указывает на размер погашаемой части основной суммы долга. В этом случае общие годовые расходы должника по обслуживанию долга (срочные уплаты) постоянны в течение всего срока погашения:

$$Y_t = Y = const \,. \tag{4.6}$$

Текущая величина всех выплат должна быть равна размеру кредита D:

$$D = \frac{Y}{1+g} + \frac{Y}{(1+g)^2} + \ldots + \frac{Y}{(1+g)^{n-1}} + \frac{Y}{(1+g)^n} \,. \tag{4.7}$$

Заметим, что возврат платежей происходит по схеме аннуитета постнумерандо, причем D – современная величина этого потока. Тогда:

$$D = \frac{Y((1+g)^n - 1)}{g(1+g)^n} \,,$$

откуда имеем:

$$Y = \frac{Dg(1+g)^n}{(1+g)^n - 1} \,. \tag{4.8}$$

Платежи по основному долгу связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} d_1 &= Y - Dg \,, \\ d_2 &= Y - (D - d_1)g = d_1(1+g) \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_t &= d_{t-1}(1+g) = d_1(1+g)^{t-1} \,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Обозначим общую сумму процентных денег через:

$$DD := D_1 \cdot g + D_2 \cdot g + \ldots + D_n \cdot g \,.$$

Воспользуемся соотношением (4.1):

$$DD = (Y - d_1) + (Y - d_2) + \ldots + (Y - d_n) = n \cdot Y - (d_1 + d_2 + \ldots + d_n) \,.$$

Применяя формулу (4.2), получаем следующее выражение для расчета суммы выплаченных за период процентов:

$$DD = n \cdot Y - \mathrm{D} \,. \tag{4.10}$$

Пример 4.3. Вы заняли на 5 лет 12 000 дол. под 12% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Составьте план погашения. Определите, какая часть основной суммы займа будет погашена за первые 2 года.

Решение. Данные для расчета: $n = 5$; $D = 12\,000$ дол.; $g = 12\%$. Находим сумму ежегодного платежа по обслуживанию займа по формуле (4.8):

$$Y = \frac{12000 \cdot 0{,}12 \cdot 1{,}12^5}{1{,}12^5 - 1} = 3\,328{,}9 \text{ дол.}$$

Остаток задолженности на начало 1-го года известно изначально: $D_1 = D$. Вычисляем остаток основного долга через 1 год: $d_1 = Y - D_1 g = 1\,888{,}9$ дол., подсчитываем проценты, начисленные на 12 000 дол. за 1 год: $Dg = 1\,440$ дол. и заполняем первую строку таблицы. Далее вычисляем $D_2 = D_1 - d_1 = 10\,111{,}1$ дол. и находим $D_2 g = 1\,213{,}3$ дол., а затем $d_2 = Y - D_2 g = 2\,115{,}6$ дол. и заполняем строку t = 2. Процесс продолжаем до тех пор, пока долг не будет погашен (5 лет).

Время, год	Остаток основного долга на начало года	Погашение основного долга в конце года t	Проценты к выплате в конце года t	Общие расходы по обслуживанию долга в конце года t
t	D_t	$d_t = Y - D_t g$	$D_t g$	$Y_t = Y$
1	12 000,0	1 888,9	1 440,0	3 328,9
2	10 111,1	2 115,6	1 213,3	3 328,9
3	7 995,5	2 369,5	959,5	3 328,9
4	5 626,0	2 653,8	675,1	3 328,9
5	2 972,2	2 972,2	356,7	3 328,9

За первые 2 года будет выплачено по основному займу $d_1 + d_2 = 4004{,}5$ дол., что составляет от основной суммы долга:

$$\frac{d_1 + d_2}{D} = 0{,}334 \quad [33{,}4\%].$$

Заметим, что платежи по погашению основного долга из года в год увеличиваются, а процентные выплаты сокращаются, хотя в сумме их величина постоянна.

Пример 4.4. Вы заняли на 5 лет 10 000 дол. под 8% годовых. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года с учетом начисленных сложных процентов на непогашенный остаток. Определите общую сумму процентов к выплате.

Решение. Данные для расчета: $D = 10\,000$ дол.; $n = 5$; $g = 8\%$. По формуле (3.8) находим ежегодный платеж по займу:

$$Y = \frac{10\,000 \cdot 0{,}08 \cdot 1{,}08^5}{1{,}08^5 - 1} = 2\,504 \text{ дол.}$$

По формуле (4.10) вычисляем общую сумму процентных денег:

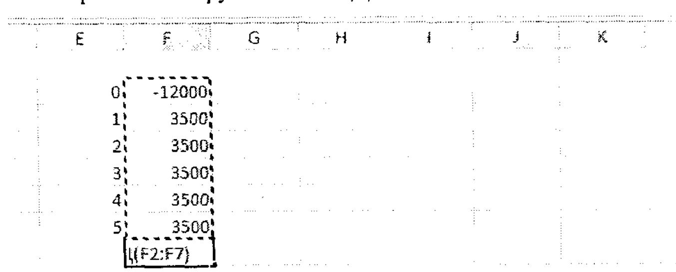
$$DD = 5Y - D = 2520 \text{ дол.}$$

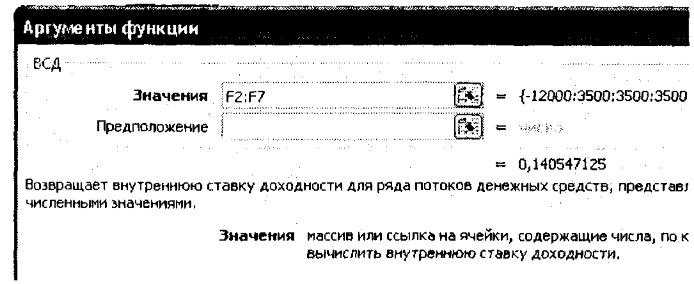
4.4. Долгосрочные схемы кредитования. Расчет эффективной ставки

Для расчета эффективной ставки (практически это внутренняя норма доходности банковского проекта кредитования клиентов, но поскольку название «внутренняя норма доходности» применимо в основном к инвестиционным процессам, термин «эффективная ставка» в кредитных операциях более удачен) применяем функцию ВСД (MSExcel) IRR (OpenOffice.Calc).

***Пример* 4.5.** Вы заняли на 5 лет 12 000 дол. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года (по 3 500 дол.). Рассчитаем эффективную ставку r_{ef}.

Решение. Применяем функцию ВСД:





Результат:

0	-12000
1	3500
2	3500
3	3500
4	3500
5	3500
	14,05%

Указание. Сравните ставку со ставкой из примера 4.3.

4.5. Краткосрочные схемы кредитования. Расчет эффективной ставки

В соответствии с Положением № 254-П от 26 марта 2004г. Центрального банка Российской Федерации о порядке формирования кредитными организациями резервов на возможные потери по ссудам (банковском кредитном риске), по ссудной и приравненной к ним задолженности производится расчет эффективной ставки по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1 + IRR)^{t_i}} = 0, \qquad t_i = \frac{(d_i - d_0)}{356}.$$

где d_i – дата i-го денежного потока; d_0 – дата начального денежного потока, который совпадает с датой перечисления денежных средств заемщику (потребителю); n – количество денежных потоков; CF_i – сумма i-го денежного потока по договору о размещении денежных средств; IRR (EFF) – годовая эффективная процентная ставка, выраженная в виде десятичной дроби.

Разнонаправленные денежные потоки (приток и отток денежных средств) включаются в расчет с противоположными математическими знаками: предоставление заемщику ссуды на дату ее выдачи включается в расчет со знаком «минус», возврат заемщиком ссуды, уплата процентов по ссуде включаются в расчет со знаком «плюс».

Продемонстрируем на примере целесообразность применения финансовой функции ЧИСТВНДОХ((значения;даты;предп) прикладной программы Microsoft Office Excel (версии 2003 и выше). Рассмотрим финансовые операции с использованием кредитной карты. Согласно договору с банком, клиент ежемесячно (в начала каждого месяца, срок 1 год) может снимать по 10 000 руб., что он и делает регулярно, при этом уплачивая предусмотренную тем же договором комиссию в размере 2% от снятой суммы. В конце года долг возвращается (годовая процентная ставка за использование заемных средств составляет 20%). Вычислить накопленную сумму долга (через 1 год) и эффективную ставку.

Воспользуемся финансовыми функциями MSExcel БС(), реализующей расчет по правой части формулы (3.6) за счет последнего параметра – «1», указывающего на характер аннуитета – «пренумерандо», и ЧИСТВНДОХ: Подготовим шаблон формул для расчетов:

=БС(D2;12;10000;;1)		=20%/12
40859	=10000*98%	
40889	=10000*98%	
40920	=10000*98%	
40951	=10000*98%	
40980	=10000*98%	
41011	=10000*98%	
41041	=10000*98%	
41072	=10000*98%	
41102	=10000*98%	
41133	=10000*98%	
41164	=10000*98%	
41194	=10000*98%	
41225	=B2	
	=ЧИСТВНДОХ(C4:C16;B4:B1	

В результате расчетов получаем, что сумма накопленной задолженности оказалась равной 133 824,56 руб. (ясно, что на эту сумму размер комиссии при снятии денег не влияет), а эффективная ставка составила 26,28% (здесь уже оказали свое влияние комиссионные платежи, повысив ставку):

-133 828,56р.		0,016667
12.11.2011	9800	
12.12.2011	9800	
12.01.2012	9800	
12.02.2012	9800	
12.03.2012	9800	
12.04.2012	9800	
12.05.2012	9800	
12.06.2012	9800	
12.07.2012	9800	
12.08.2012	9800	
12.09.2012	9800	
12.10.2012	9800	
12.11.2012	-133 828,56р.	
	26,28%	

Составим уравнение баланса для вычисления эффективной ставки в рассмотренном примере:

$$\sum_{i=1}^{12} \frac{9\,800}{(1+r_{ef})^{(i-1)/12}} - \frac{133\,826,56}{(1+r_{ef})} = 0 \Rightarrow r_{ef} \approx 0,2628 .$$

Самостоятельное задание. Согласно договору с банком, клиент ежемесячно (в начала каждого месяца, срок 1 год) может снимать по 10 000 руб., что он и делает регулярно, при этом уплачивая предусмотренную тем же договором комиссию в размере 0,5% от снятой суммы. В конце года долг возвращается (годовая процентная ставка за использование заемных средств составляет 20%). Вычислить накопленную сумму долга (через 1 год) и эффективную ставку, сопоставить полученный результат с результатом приведенного выше примера и сделать выводы.

4.6. Создание погасительного фонда

Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для его обеспечения. Обычная мера при значительной сумме долга заключается в создании погасительного фонда. Иногда это оговаривается в договоре выдачи займа в качестве гарантии его погашения. Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (например на специальный счет в банке), на которые начисляются проценты. Сумма этих взносов равна сумме долга. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными. Ограничимся рассмотрением первого случая.

Предположим, что для погашения взятой суммы D на n лет под g годовых сложных процентов дебитор открывает в банке счет, ежегодно внося на этот счет сумму w под r сложных процентов годовых. Если сделка не относится к разряду спекулятивных, то $r < g$.

Пользуясь формулой (4.4), рассчитываем накопленную через n лет сумму (ее должно хватить для возврата задолженности с процентами):

$$D(1+g)^n = \frac{w\left((1+r)^n - 1\right)}{r}, \qquad (4.11)$$

откуда можно выразить минимальную сумму, которую нужно вносить ежегодно в погасительный фонд, чтобы к концу срока иметь возможность рассчитаться за кредит:

$$w = \frac{Dr(1+g)^n}{\left((1+r)^n - 1\right)}. \qquad (4.12)$$

Если $r = g$, то создание погасительного фонда реализует схему В возврата задолженности частями.

4.7. Потребительский кредит

Схема потребительского кредитования является самой дорогой, поскольку рассмотренные в п.4.1 деньги $D(1+g)^n$ выплачиваются в полном объеме и даже раньше. Обычно этот метод применяется для схем кредитования сроком не более 1 года. При этом основная сумма чаще всего разбивается поровну для каждого погасительного периода, а проценты $D(1+g)^n - D$ выплачиваются согласно предусмотренному в договоре графику. Для кредитов, выданных на 1 год и возвращаемых ежемесячными платежами часто применяется «метод 78-х». Рассмотрим его на примере.

Пример 4.6. Сумма 12 000 дол. выдана в долг на год на условиях расчетов по схеме потребительского кредитования под 30% годовых (основная сумма выплачивается в рассрочку равными платежами ежемесячно, а процентный годовой платеж начисляется сразу и также погашается ежемесячно). Рассматриваем схемы с ускоренным и замедленным списанием процентов по методу 78-х: 1/78+2/78+...+12/78=1. Требуется вычислить эффективную ставку r_{ef}.

Решение. Поскольку проценты начисляются сразу на всю сумму (потребительские условия кредитования), то за год они составляют: 3 600=12 000×30%. Рассмотрим следующие варианты возврата процентной части долга (ежемесячно):

1) в долях 12/78, ..., 1/78;

2) в долях 1/78, ..., 12/78.

В первом случае для поиска эффективной ставки решается уравнение:

$$\frac{1\,553{,}846}{(1+r_{ef})^{\frac{1}{12}}} + \frac{1\,507{,}692}{(1+r_{ef})^{\frac{2}{12}}} + \ldots + \frac{1\,046{,}154}{(1+r_{ef})^{1}} = 12\,000,$$

Выполняем расчеты с использованием инструмента «Подбор параметра» MSExcel (для пакетов MSOffice с сокращенным набором функций) или пользуемся финансовой функцией ЧИСТВНДОХ():

=ЧИСТВНДОХ(G11:G23;C11:C23)

C	D	E	F	G
месяц	долг		процент	общая сумм
01.янв				-12000
01.фев	12000	1000	553,8462	1553,846
01.мар	11000	1000	507,6923	1507,692
01.апр	10000	1000	461,5385	1461,538
01.май	9000	1000	415,3846	1415,385
01.июн	8000	1000	369,2308	1369,231
01.июл	7000	1000	323,0769	1323,077
01.авг	6000	1000	276,9231	1276,923
01.сен	5000	1000	230,7692	1230,769
01.окт	4000	1000	184,6154	1184,615
01.ноя	3000	1000	138,4615	1138,462
01.дек	2000	1000	92,30769	1092,308
01.янв	1000	1000	46,15385	1046,154

0,72

=ЧИСТВНДОХ(G11:G23;C11:C23)

Аналогичные действия выполняем для второго случая. В первом случае эффективная ставка составила приблизительно 72%, во втором – 60%.

4.8. Кредитный калькулятор

Разработка планов погашения краткосрочной задолженности. В широком смысле, все вычисления с использованием функциональных возможностей электронной таблицы, можно назвать «кредитным калькулятором» для определенного класса операций. К этому понятию относятся все рассмотренные в 4 части примеры. Рассмотрим еще одну ситуацию.

Один банк предлагает процентную ставку в размере 15%, другой – 17%. У первого банка условия возврата следующие: в течение года основная сумма долга погашается одинаковыми ежемесячными платежами, однако все проценты на сумму кредита начисляются сразу и снимаются в момент получения кредита. У второго банка возврат задолженности происходит по схеме – половина суммы через 6 месяцев (плюс проценты на непогашенный остаток), половина суммы – в конце года (плюс проценты на непогашенный остаток), при оформлении кредита снимается комиссия 1 % от суммы кредита. На первый взгляд самое выгодное предложение у первого банка, и заемщик выбирает кредит под 15% годовых.

Проверим, верно ли он поступил. Для этого нужно самостоятельно рассчитать эффективную ставку по кредиту. Сделать это можно, воспользовавшись программой «MSExcel» и ее функцией «ЧИСТВНДОХ».

Возьмем условно сумму кредита 100 000 (эта сумма нужна лишь для расчетов в электронной таблице, на размер эффективной ставки она не повлияет). Запишем исходные данные в таблицу, обозначая знаком «-» возврат денег, а знаком «+» - получение. Затем производим вычисления:

Погашено	Начислено %	Снято (%,комиссия)	Реальные потоки
	=B4*A2	=-E4	=B4+D4+F4
=-B$4/12			=B5+D5+F5
=-B$4/12			=B6+D6+F6
=-B$4/12			=B7+D7+F7
=-B$4/12			=B8+D8+F8
=-B$4/12			=B9+D9+F9
=-B$4/12			=B10+D10+F10
=-B$4/12			=B11+D11+F11
=-B$4/12			=B12+D12+F12
=-B$4/12			=B13+D13+F13
=-B$4/12			=B14+D14+F14
=-B$4/12			=B15+D15+F15
=-B$4/12			=B16+D16+F16
			=ЧИСТВНДОХ(G4:G16;A4:A16)

Погашено	Начислено %	Снято (%,комиссия)	Реальные потоки
		=-C21*1%	=B21+D21+F21
-50000	=C21*A$19*1/2	=-E22	=B22+D22+F22
-50000	=C22*A$19*1/2	=-E23	=B23+D23+F23
			=ЧИСТВНДОХ(G21:G23;A21:A23)

Результат свидетельствует о целесообразности условий 17% – ного кредита для заемщика:

15%

	Получено	Остаток долга	Погашено	Начислено %	Снято (%,комиссия)	Реальные потоки
12.01.2012	100000	100000		15000	-15000	85000
12.02.2012		91666,66667	-8333,3333			-8333,333333
12.03.2012		83333,33333	-8333,3333			-8333,333333
12.04.2012		75000	-8333,3333			-8333,333333
12.05.2012		66666,66667	-8333,3333			-8333,333333
12.06.2012		58333,33333	-8333,3333			-8333,333333
12.07.2012		50000	-8333,3333			-8333,333333
12.08.2012		41666,66667	-8333,3333			-8333,333333
12.09.2012		33333,33333	-8333,3333			-8333,333333
12.10.2012		25000	-8333,3333			-8333,333333
12.11.2012		16666,66667	-8333,3333			-8333,333333
12.12.2012		8333,333333	-8333,3333			-8333,333333
12.01.2013		0	-8333,3333			-8333,333333
					Эффективная ставка =	***35,95%***

17%

	Получено	Остаток долга	Погашено	Начислено %	Снято (%,комиссия)	Реальные потоки
12.01.2012	100000	100000			-1000	99000
12.07.2012		50000	-50000	8500	-8500	-58500
12.01.2013		0	-50000	4250	-4250	-54250
					Эффективная ставка =	***19,34%***

Получается, что первый вариант кредитования значительно дороже. Можно сделать вывод, что электронный кредитный калькулятор позволяет наглядно и точно выполнять расчеты и принимать грамотные решения.

Кредитный калькулятор по операциям с кредитными картами. Идею кредитной карточки первым выдвинул Эдуард Беллами (Edward Bellamy) в книге «Взгляд в прошлое» (Looking Backward), вышедшей в свет в 1888 г., а первые попытки практического внедрения картонных кредитных карточек были сделаны в США предприятиями розничной торговли и нефтяными компаниями еще в двадцатые годы. Недолговечность картонных карточек заставила искать им замену, и десятилетием спустя начали появляться первые металлические, а затем и пластиковые карточки с тиснением. Тиснение позволило частично автоматизировать процесс обслуживания этих карточек, поскольку с карточек можно было делать оттиски и переносить информацию о владельце на заранее отпечатанные чеки (слипы). В послевоенные годы появились пластиковые карточки таких известных компаний, как Diners Club и American Express. В шестидесятые годы на пластиковых карточках стали помещать магнитную полосу, на которой записывалась информация. В ходе развития пластиковых карт возникли разные виды пластиковых карточек, различающихся назначением, функциональными и техническими характеристиками.

С точки зрения механизма расчета выделяются двусторонние и многосторонние системы. Двусторонние карточки возникли на базе двусторонних соглашений между участниками расчетов, где владельцы карточек могут использовать их для покупки товаров в замкнутых сетях, контролируемых эмитентом карточек (универмаги, бензоколонки и т.д.). В отличии от этого многосторонние системы, которые возглавляют национальные ассоциации банковских карточек, а также компании, выпускающие карточки туризма и развлечений, предоставляют владельцам карточек возможность покупать товары в кредит у различных торговцев и организаций сервиса, которые признают эти карточки в качестве платежного средства. Карточки этих систем так же позволяют получать кассовые авансы, пользоваться автоматами для снятия наличных денег с банковского счета и т.д.

Другое деление карточек определяется их функциональными характеристиками. Здесь различаются кредитные и дебетовые карточки. Наиболее распространенными карточками в мире являются карточки платежных систем VISA, Eurocard-Mastercard, American Express. Карточка – это, прежде всего, удобный инструмент безналичных расчетов.

Основные виды – это кредитные и дебетовые. Кредитные карточки выпускаются для платежеспособных потребителей. Их использование позволяет им иметь автоматически возобновляемый кредит без специального обеспечения для покупок. Они могут также применяться для получения кредита в форме наличности в тех финансовых учреждениях, которые являются членами соответствующей системы. К потенциальным владельцам предъявляются достаточно жесткие требования в отношении их кредитоспособности. При принятии решения о выдаче тому или иному лицу кредитной карточки банк тщательно проверяет и анализирует такие данные, как средний годовой доход, кредитная история, жилищные условия, род занятий, семейное положение, наличие банковского счета и т.д.

Дебетовая карточка наиболее распространена в нашей стране в силу ряда объективных экономических причин. Ее именуют также карточкой наличных средств или карточкой активов. Дебетовая карточка, как и кредитная, имеет на магнитной полосе фамилию и имя владельца как клиента определенного финансового учреждения. В отличие от кредитной, дебетная карточка является для ее владельца удобным средством проведения платежных операций путем прямого уменьшения размеров его финансовых активов.

Анализ операции с кредитной картой проведем на основании следующих исходных данных:

Основные условия кредитования:	
Кредитный лимит (в рублях)	70 000,00
Дата начала кредитования	15.02.2010
Дата операции (число каждого месяца)	15
Срок действия карты (месяцев)	6
Перечень платежей, учитываемых при расчете эффективной ставки:	
Комиссия при снятии средств	3%
Процентная ставка по ссуде (наличные) (% годовых)	19%

Рассмотрим пример операции, проведенной на этих условиях:

ДАТА	запрошенная сумма
15.02.2010	15000
15.03.2010	15000
15.04.2010	20000
15.05.2010	20000
15.08.2010	

К возврату в конце срока подлежит следующая сумма денег:

$$15\ 000(1+19\%/12)^6+15\ 000(1+19\%/12)^5+20\ 000(1+19\%/12)^4+20\ 000(1+19\%/12)^3=$$
$$=74\ 970{,}51.$$

Поскольку взимается комиссия, то реальные полученные суммы меньше и составляют, соответственно: 14500,14500,19400,19400. Уравнение баланса для расчета эффективной ставки имеет вид:

$$\frac{14550}{(1+IRR)^0}+\frac{14550}{(1+IRR)^{1/12}}+\frac{19400}{(1+IRR)^{2/12}}+\frac{19400}{(1+IRR)^{3/12}}=\frac{74970{,}51}{(1+IRR)^{1/2}}.$$

Для решения этого уравнения использовалась уже знакомая нам финансовая функция ЧИСТВНДОХ() MSExcel. Приведем шаблон формул для расчета эффективной ставки:

```
                                                    =19%/12
реально снято (без комиссии)
=-D3*97%
=-D4*97%
=-D5*97%
=-D6*97%
=B10
=ЧИСТВНДОХ(E3:E7;B3:B7)              ЭФФ.СТАВКА

   Долги:
   =D3*(1+H1)^6+D4*(1+H1)^5+D5*(1+H1)^4+D6*(1+H1)^3
```

В итоге вычислений получаем:

E8 = ЧИСТВНДОХ(E3:E7;B3:B7)

A	B	C	D	E	F	G	H
		Кредитная карта 19% в год, в месяц					0,02
ДАТА		запрошенная сумма		реально снято (без комиссии)			
	15.02.2010		15000	-14550			
	15.03.2010		15000	-14550			
	15.04.2010		20000	-19400			
	15.05.2010		20000	-19400			
	15.08.2010			74970,50543			
				31,21%	ЭФФ.СТАВКА		
Долги:							
	74970,50543						

В результате получаем эффективную ставку 31,21% годовых, что намного превышает номинальную ставку 19%.

Самостоятельное задание. Выполните финансовые вычисления в электронной таблице для следующей ситуации:

Основные условия:	
Кредитный лимит (в рублях)	70 000,00
Дата начала кредитования	15.02.2010
Дата операции (число каждого месяца)	15
Срок действия карты (месяцев)	8
Перечень платежей, учитываемых при расчете эффективной ставки:	
Комиссия при снятии средств	5%
Процентная ставка по ссуде (наличные) (% годовых)	18%

Считать, что первые 4 месяца снималось по 10 000, а следующие 4 месяца по 7 500 рублей.

ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

5.1. Оценка эффективности инвестиций

Инвестиционный процесс – это финансовый поток, включающий платежи двух видов – инвестиционные затраты и инвестиционные доходы, причем платежи, связанные с вложением капитала (инвестированием), условно считаются отрицательными, а платежи, связанные с последующим получением дохода, считаются положительными.

Поскольку капиталом считаются деньги, находящиеся в обороте и способные к «самовозрастанию», инвестиционные затраты часто называют капитальными вложениями, однако термин «инвестиционные затраты» немного шире, чем «капитальные вложения».

Согласно Федеральному закону «Об инвестиционной деятельности, осуществляемой в форме капитальных вложений», под капитальными вложениями понимаются инвестиции в основной капитал (основные средства), в том числе затраты на новое строительство, расширение, реконструкцию и техническое перевооружение действующих предприятий, приобретение машин, оборудования, инструмента, инвентаря, проектно-изыскательские работы и другие затраты.

Инвестиционные затраты – это затраты, возникающие при реализации инвестиционных проектов, связанных с расширением действующего или созданием нового бизнеса. Вообще говоря, инвестиционные затраты возникают не только при организации бизнеса «с нуля». Они могут быть связаны с расширением действующего бизнеса, а также с привнесением в него некоторых качественных изменений.

Иногда в контексте понятно, о чем идет речь, и термин «инвестиционные затраты» может быть заменен термином «инвестиции».

Таким образом, капитальные вложения есть частный случай инвестиций, диверсифицированный по объекту их вложения.

Началом процесса инвестиций $t=0$ будем считать момент первого вложения капитала. Пусть K – начальные капиталовложения (относящиеся к моменту $t=0$). Считаем, что длительность инвестиционного проекта равна n периодов (лет); $t=n$ – год последнего поступления чистого дохода от инвестиций. Между первым вложением средств и первым поступлением доходов должно пройти некоторое время (считаем, не менее года).

Под *чистым доходом* будем понимать разность между доходом от проекта и размером инвестиций за год t. Пусть чистые доходы за 1, 2,..., n годы составляют, соответственно, $R_1, R_2, ..., R_n$.

Ясно, что чистые доходы могут быть отрицательными, в случае если за год t требуются дополнительные вложения капитала, которые не покрываются доходами за этот год, нулевыми, если в году t вложено средств столько же, сколько получено доходов, или положительными, если доходы выше капиталовложений, но $R_n > 0$.

При анализе инвестиционных проектов важно сопоставить затраты с результатами с учетом влияния времени. Операцию наращения денег во времени или операцию дисконтирования будем называть операцией «приведения» денег.

Для «приведения» денежных потоков к начальному моменту используется ставка r, которая называется *ставкой приведения*. При выборе r обычно ориентируются на текущий или ожидаемый уровень ссудного процента. Один и тот же инвестиционный проект может рассматриваться на различных этапах его существования, поэтому ставка приведения может меняться.

К основным показателям эффективности инвестиций относятся:

1. *Чистый приведенный доход* (Net Present Value).

Чистым приведенным доходом называется разность дисконтированных показателей чистого дохода и инвестиционных затрат. Фактически это современная величина инвестиционной прибыли. Расчет указанного показателя производится по формуле:

$$NPV = -K + \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}. \tag{5.1}$$

Если $R_t = R = const$, $t = \overline{1,n}$, то

$$NPV = -K + R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \tag{5.2}$$

Если $NPV < 0$, то инвестиционный проект следует отклонить, если $NPV \geq 0$, то проект принимается к рассмотрению.

Для акций и облигаций чистый приведенный доход равен разнице между внутренней стоимостью $P_{вн}$ и текущей рыночной ценой P: $NPV = P_{вн} - P$.

2. *Индекс доходности* (Profitability Index).

Индексом доходности называется отношение современной стоимости чистых доходов от инвестиций к современной стоимости осуществляемых капиталовложений.

Этот показатель, в отличие от предыдущего, является относительным, и измеряется в долях или в процентах (аналог рентабельности). Индекс доходности связан с чистым приведенным доходом следующим соотношением:

$$PI = \frac{NPV + K}{K} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}. \tag{5.3}$$

Если $R_t = R = const$, $t = \overline{1,n}$, то

$$PI = \frac{R\left((1+r)^n - 1\right)}{Kr(1+r)^n}. \tag{5.4}$$

Если $PI < 1$, то проект следует отклонить, если $PI \geq 1$, то проект принимается к рассмотрению.

3. *Внутренняя норма доходности* (Internal Rate of Return, или IRR).

Внутренней нормой доходности инвестиционного процесса называется процентная ставка, при которой чистый приведенный доход по проекту равен нулю. Этот показатель находится из алгебраического уравнения:

$$K = \frac{R_1}{(1+IRR)} + \ldots + \frac{R_n}{(1+IRR)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+IRR)^t}. \tag{5.5}$$

Противоречивость этого показателя заключается в том, что алгебраическое уравнение степени n может иметь n действительных положительных корней. В таком случае выбор нужной величины может быть затруднителен. Но если, величины $K, R_1, \ldots, R_n$ положительны, то уравнение (5.5) имеет только один положительный корень $x = 1 + IRR$. Если к тому же выполняется неравенство:

$$K < R_1 + \ldots + R_n, \tag{5.6}$$

то $IRR > 0$ ($x > 1$). Действительно, при $IRR = 0$ имеем $K = R_1 + \ldots + R_n$, при дальнейшем увеличении IRR правая часть (5.5) строго убывает. Ввиду (5.6), получается только один корень.

Однако часто проект не приносит положительных чистых доходов в течение всего срока, случаются и убытки, поэтому расчет этого показателя не очень удобен. С другой стороны, внутренняя норма доходности имеет и весьма существенное преимущество: для ее расчета не нужно знать ставку приведения, а лишь величины финансовых потоков по проекту. В частности, если $R_t = R = const$, для всех $t = \overline{1,n}$, то уравнение (5.5) принимает вид:

$$\frac{R}{K} = \frac{IRR(1+IRR)^n}{(1+IRR)^n - 1}.$$

Проект может быть принят к рассмотрению, только если $IRR \geq r_H$, где r_H – минимально привлекательная для инвестора ставка процента.

Пусть $n = 2$, $K > 0$, $R_1 \geq 0$, $R_2 > 0$. В таком случае уравнение (5.5) можно переписать в виде:

$$\frac{R_1}{(1+IRR)^1} + \frac{R_2}{(1+IRR)^2} - K = 0, \text{ или } \frac{K(1+IRR)^2 - R_1(1+IRR) - R_2}{(1+IRR)^2} = 0.$$

Отбрасывая положительный знаменатель и обозначая $x = 1 + IRR$, получаем квадратное уравнение:

$$Kx^2 - R_1x - R_2 = 0. \tag{5.7}$$

Корни уравнения (5.8) легко отыскать по формуле: $\dfrac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4KR_2}}{2K}$.

Поскольку $K > 0$, $R_1 \geq 0$, $R_2 > 0$, то $\sqrt{R_1^2 + 4KR_2} > R_1$, следовательно, $\dfrac{R_1 - \sqrt{R_1^2 + 4KR_2}}{2K} < 0$, поэтому может подойти лишь корень $x = \dfrac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4KR_2}}{2K}$. Потребуем, чтобы $\dfrac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4KR_2}}{2K} > 1$. Преобразуем последнее неравенство к виду: $\dfrac{\sqrt{R_1^2 + 4KR_2}}{2K} > \dfrac{2K - R_1}{2K}$. Обе части этого неравенства, также как и знаменатель, положительны. Отбросим знаменатель и возведем в квадрат: $R_1^2 + 4KR_2 > 4K^2 - 4KR_1 + R_1^2$, или $4K(R_1 + R_2) > 4K^2$, откуда получаем необходимое условие эффективности инвестиционного проекта $R_1 + R_2 > K$.

Итак, при $n = 2$, $K > 0$, $R_1 \geq 0$, $R_2 > 0$, $R_1 + R_2 > K$, внутренняя норма доходности инвестиционного проекта вычисляется следующим образом:

$$IRR = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4KR_2}}{2K} - 1. \tag{5.8}$$

4. *Дисконтный срок окупаемости* (Payback Period) – это минимальный срок, при котором сумма приведенных к начальному моменту чистых доходов становится не ниже суммы приведенных капитальных вложений. В зависимости от поставленной цели, дисконтный срок окупаемости можно вычислять с различной точностью.

Пример 5.1. Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта, если ставка приведения 20% в год:

t	0	1	2	3
$-K$	-100			
R_t		50	100	100

Решение. В случае $n=1$, $NPV=\frac{50}{1{,}2}-100=-58$. При $n=2$, $NPV=-58+\frac{100}{1{,}2^2}=+11$. Следовательно, через 2 года проект окупится.

Пример 5.2. Проект, требующий инвестиционных затрат в размере 160 000 дол., предполагает получение годового дохода в размере 30 000 дол. на протяжении 15 лет. Оценить целесообразность осуществления инвестиционного проекта, если ставка приведения 15%.

Решение. Данные для расчета: $K=160\,000$ дол., $R=30\,000$ дол., $n=15$, $r=0{,}15$. Чтобы оценить целесообразность инвестиций, достаточно подсчитать один из показателей: *NPV* или *PI*. Мы подсчитаем оба.

$$NPV=\left(-160000+30000\frac{1{,}15^{15}-1}{0{,}15\cdot 1{,}15^{15}}\right)=15\,421 \text{ дол.}$$

$$PI=\frac{NPV+160\,000}{160\,000}=1{,}096 \quad [109{,}6\%].$$

Вывод: поскольку $NPV>0$ $[PI>1]$, то инвестиции целесообразны.

Пример 5.3. Для каждого из проектов (A,B,C) рассчитайте чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения 20%. Сделайте вывод о целесообразности капиталовложения:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	– 370	–	–	–	–	1000			
B	– 100	50	80						
C	– 50	–	–	–	60	–	–	–	100

Решение.

A. Имеем $K=370$, $R_5=1000$, $n=5$, $r=0{,}2$. Применяем формулы (5.1), (5.3). Находим:

$$NPV=-370+\frac{1000}{1{,}2^5}=32; \qquad PI=\frac{32+370}{370}=1{,}09.$$

Поскольку $NPV>0$ ($PI>1$), то инвестиции в случае *A* целесообразны. Для нахождения внутренней нормы доходности составляем уравнение (5.5), полагая $K=370$, $R_1=R_2=R_3=R_4=0$, $R_5=1\,000$:

$$370=\frac{1\,000}{(1+IRR)^5},$$

откуда находим внутреннюю норму доходности $IRR=0{,}22$ [22%]. Заметим, что $IRR>r$.

B. Имеем $K=100$, $R_1=50$, $R_2=80$, $n=2$.

$$NPV=-100+\frac{50}{1{,}2}+\frac{80}{1{,}2^2}=-2{,}8<0; \; PI=0{,}972<1.$$

Капиталовложения нецелесообразны. Убедимся, что $IRR<0{,}2$. По формуле (5.8) получаем $IRR\approx 0{,}1787$ [17,87%].

C. Имеем $K=50$, $R_4=60$, $R_8=100$, $n=8$.

$$NPV=-50+\frac{60}{1{,}2^4}+\frac{100}{1{,}2^8}=2>0; \; PI=1{,}04>1.$$

Проект принимается к рассмотрению. Для нахождения *IRR* преобразуем уравнение (5.5):

$$50=\frac{60}{(1+IRR)^4}+\frac{100}{(1+IRR)^8},$$

к квадратному уравнению:

$$50x^2-60x-100=0,$$

обозначив через $x=(1+IRR)^4$.

Это уравнение имеет только один положительный корень $x\approx 2{,}13623$, следовательно, $IRR\approx 0{,}209$ [20,9%].

Если инвестиционный процесс бесконечен: $R_t=R$, $t=1,2,\ldots$, то для подсчета *NPV* используются формулы

$$NPV=-K+\frac{R}{r}, \quad PI=\frac{R}{K\cdot r}, \quad IRR=\frac{R}{K}. \tag{5.9}$$

Пример 5.4. На строительство магазина нужно затратить сразу 10 000 дол., а затем он неограниченно долго будет давать доход 2 000 дол. в год. Ставка приведения 8%. Определить оценочные характеристики данного проекта (NPV, PI, IRR).

Решение. В нашем случае $K=10\,000$ дол., $R=2000$ дол., $r=0{,}08$. Применяя формулы (5.9), находим:

$$NPV=\left(-10000+\frac{2000}{0{,}08}\right)=15\,000 \text{ дол.}; \; PI=2{,}5 \; [250\%],$$

$$IRR=\frac{2000}{10000}=0{,}2 \, [20\%].$$

Можно сделать вывод, что инвестиции целесообразны, поскольку $NPV>0$, $PI>1$.

При сравнении различных возможностей инвестирования будем ориентироваться на индекс доходности PI (или NPV), поскольку внутренняя норма доходности часто определяется неоднозначно и не может служить надежным критерием.

Таким образом, чем выше индекс доходности (или чистый приведенный доход), тем, при прочих равных условиях, проект привлекательнее для инвестирования.

Пример 5.5. Какой из альтернативных проектов капиталовложений A или B предпочтительнее, если ставка приведения 8% годовых:

t	0	1	2	3	4
A	– 300	110	140	120	
B	– 300	100	100	100	100

Решение. Используя формулы (5.3) и (5.4), считаем в обоих случаях индекс доходности:

$$PI_A = \frac{1}{300}\cdot\left(\frac{110}{1{,}08}+\frac{140}{1{,}08^2}+\frac{120}{1{,}08^3}\right)=1{,}057,$$

$$PI_B = \frac{100}{300}\cdot\frac{1{,}08^4-1}{0{,}08\cdot 1{,}08^4}=1{,}10,$$

Поскольку $PI_A < PI_B$, то выбираем проект B.

5.2. Расчет финансовых показателей при оценке ценных бумаг. Оценка стоимости акций

В плане оценки акций основными являются подходы к оценке с точки зрения дивидендов и с точки зрения прибыли общества-эмитента. Ниже рассматривается подход к оценке акций с точки зрения дивидендов.

Поскольку дивиденд на акцию равняется прибыли на акцию, умноженной на коэффициент выплаты, то величину дивиденда можно определить на основе прогнозных величин дохода на акцию и коэффициента выплаты. Иногда между этими показателями может быть установлена достаточно тесная зависимость, для определения которой может использоваться эконометрический анализ статистических данных, в том числе с применением частичной корректировки результата.

В западных странах сложилась практика оценки качества акций: акциям присваивается определенный рейтинг, который говорит о степени их возможной доходности. Его устанавливают аналитические компании. Наиболее известными из них в мировой практике являются компании «Standart & Poor» и «Moody's» (США).

Каждая аналитическая компания использует свои символы для обозначения уровня рейтинга. Например, компания «Standart & Poor» использует следующие обозначения для обыкновенных акций: A, B, C. Самым высоким рейтингом считается A, самым низким – C. Обычно эта компания применяет более детальную классификацию рейтингов: A+ (высший рей-

тинг), A (высокий), A– (выше среднего), B+ (средний), B (ниже среднего), B– (низкий), C (очень низкий). Рейтинг ценной бумаги определяет отношение к ней инвесторов и соответственно ее цену и доходность. В терминологии фондового рынка встречается понятие «голубые фишки». Оно относится к ведущим в своих отраслях крупным предприятиям с высоким кредитным рейтингом.

Оценка стоимости акций предприятия представляет собой по сути определение стоимости компании (бизнеса). Основой оценки акций является определение их стоимости как финансового инструмента, способного приносить его владельцу доход. Основными источниками доходов от владения акциями являются дивиденды.

Под *стоимостью* будем понимать расчетный показатель, а под ценой – показатель, объявленный в прейскурантах, ценниках или котировках. В любой момент времени цена однозначна, а стоимость многозначна и зависит от числа профессиональных участников рынка ценных бумаг, осуществляющих оценку.

Для оценки стоимости акций используют следующие характеристики:

- *Номинальная (нарицательная) цена* – по этой цене акции размещаются при учреждении акционерного общества (АО). Сумма номинальных цен всех размещенных привилегированных и обыкновенных акций составляет стоимость уставного капитала АО. В соответствии с законодательством сумма всех размещенных привилегированных акций не должна превышать 25% УК АО. Номинальные цены привилегированных акций одного типа должны быть одинаковыми. Номинальные цены обыкновенных акций также должны быть одинаковыми.
- *Рыночная цена акций* формируется в результате взаимодействия спроса и предложения на рынке и, как правило, не совпадает с номинальной ценой. Чем выше ожидаемая прибыль АО, тем выше спрос на акции на фондовом рынке и тем выше рыночная цена акций. Наоборот, информация о финансовых затруднениях компании приводит к падению спроса на ее акции и уменьшению их рыночной цены. В соответствии с этим на вторичном рынке цена акции может быть выше или ниже ее номинальной цены. На первичном рынке акции, как правило, продают по ценам не ниже их номинальной цены. Однако при размещении дополнительных обыкновенных акций они могут быть реализованы акционерам данного АО по цене не ниже 90% их рыночной цены. Если же дополнительные акции размещают через посредника, то их цена может быть ниже рыночной на размер вознаграждения посредника. Рыночную цену часто называют курсовой стоимостью (курсом) акции.
- *Внутренняя стоимость акции* используется при оценке инвестором ситуации, связанной с покупкой или продажей акций. Рыночная цена ре-

ально существует, она объективна, внутренняя стоимость субъективна и зависит от оценки инвестора, который должен провести серьезную аналитическую работу, а затем сравнить ее с рыночным курсом. Если текущий рыночный курс оказывается ниже внутренней стоимости, то такая акция считается недооцененной рынком и является кандидатом на покупку. Если текущий рыночный курс оказывается выше внутренней стоимости, то такая акция считается переоцененной рынком и является кандидатом на продажу. Если эти две характеристики совпадают, значит, рыночная цена полностью отражает внутреннюю стоимость ценных бумаг, поэтому спекулятивные операции по ее купле/продаже нецелесообразны.

- *Чистая приведенная стоимость* (*NPV*) акции или любого другого актива равна разности между ее внутренней стоимостью и затратами на приобретение (например, рыночной ценой). Если $NPV < 0$, то такая акция является переоцененной, если $NPV < 0$, то – переоцененной.

- *Доход* по ценным бумагам бывает двух видов: купонный (процентный, дивидендный), прирост капитала (разница между ценой погашения или продажи и ценой покупки).

- *Текущая доходность (дивидендная ставка)* определяется как отношение годового дивиденда к текущей рыночной цене акции (в долях или в процентах).

- *Темп прироста дивиденда* определяется на основе статистических данных о выплате дивидендов за предыдущие годы или о темпах прироста прибыли компании, если коэффициент выплаты дивидендов (отношение суммы дивидендов к полученной прибыли) остается постоянным на протяжении ряда лет.

Важной компании является *капитализация* – объем капитала в рыночной оценке, который воплощен в акциях. Капитализация компании определяется как *произведение текущей рыночной цены всех размещенных акций на их число*.

Поскольку успешная работа компании в долговременной перспективе приводит к росту рыночной цены ее акций, то акции становятся доступными меньшему числу инвесторов, т.е. их ликвидность снижается. Для сохранения ликвидности акций своей компании на прежнем уровне собрание акционеров может принять решение о дроблении размещенных акций.

Дробление – это процедура обмена (конвертации) одной акции на две или большее число акций той же категории. В результате такой процедуры увеличивается общее число акций данного АО с одновременным уменьшением их номинальной и рыночной цены. Для осуществления дробления должны быть внесены изменения в устав компании относительно номинальной цены и числа объявленных акций. После данной

процедуры владелец одной старой акции получит взамен две или большее количество новых, номинал которых будет меньше номинала старой акции во столько раз, на сколько акций было осуществлено дробление одной акции. Одновременно следует ожидать и уменьшения рыночной цены новых акций.

Практика работы западных компаний показывает, что дробление акций, являющееся следствием продуктивной работы АО, приводит к росту рыночной цены новых акций относительно номинала. Например, рыночная цена акции номиналом 100 руб. выросла до 200 руб., и акционеры приняли решение о дроблении каждой акции на две новые. После такой операции владелец одной старой акции получит две новые акции номиналом 50 руб. Рыночная цена новой акции может составить 100 руб. или больше, например, 105 руб. Тогда акционер выиграет от дробления.

Операцию, обратную дроблению, называют *консолидацией*.

Несмотря на то, что акция делает акционера одним из владельцев компании и предоставляет ему право голоса и контроля, на практике положение дел в АО зависит от того лица (или группы лиц), в руках которого находится контрольный пакет акций, который дает владельцу возможность проводить свои решения на собрании акционеров.

*Метод капитализации доход*а предполагает, что внутренняя стоимость любого капитала основана на денежном потоке, который инвестор предполагает получить в будущем в результате обладания этим капиталом. Поскольку денежный поток ожидают в будущем, его величину корректируют с помощью процентной ставки r (доходность по альтернативному вложению, соответствующая уровню риска для данного финансового потока, выраженная в долях единицы).

Внутренняя (истинная) стоимость капитала (*актива, ценной бумаги*) может быть выражена следующей формулой:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{R_t}{(1+r)^t}, \tag{5.10}$$

где R_t – денежные выплаты по данному финансовому активу в t-м году.

Формула (5.10) фактически представляет собой сумму дисконтированных поступлений и является аналогом уменьшаемого в формуле (5.1) при $n \to \infty$. Знак бесконечности принимают для ценных бумаг без ограниченного срока погашения (например, для обыкновенных акций).

Рассмотрим вопрос о том, каким образом может быть вычислена внутренняя стоимость обыкновенной акции путем дисконтирования ожидаемого дивиденда по ставке доходности, соответствующей ценной бумаге данного уровня риска.

Внутреннюю стоимость обыкновенных акций, определяемую акционером, рассчитывают дисконтированием всех возможных дивидендов, которые будут по ней выплачены. Поскольку акция является ценной бумагой без ограниченного срока погашения и получение дивидендов теоретически предполагается бесконечным, формула для расчета внутренней стоимости ($P_{вн}$) акции принимает следующий вид:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_{акц,t}}{(1+r)^t}, \tag{5.11}$$

где $d_{акц,t}$ – дивиденд, который ожидают получить по акции в t-м году (руб.), r – процентная ставка (доходности по альтернативному вложению), соответствующая уровню риска инвестирования в акции данного АО.

Рассмотрим некоторые частные случаи расчета внутренней стоимости:

- модель нулевого роста дивидендов;
- модель показательного роста дивидендов во времени;
- модель линейного роста.

Модель нулевого роста дивидендов. Если прироста дивидендов не происходит, то внутренняя стоимость акций является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_{акц,t}}{(1+r)^t} = d_{акц,0} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = d_{акц,0} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r} = \frac{d_{акц,0}}{r},$$

окончательно получаем:

$$P_{вн} = \frac{d_{акц,0}}{r}. \tag{5.12}$$

Показательный рост дивидендов можно рассматривать как вклад начальной суммы дивидендов на некоторый период, при условии наращения этой суммы по сложным процентам. Если дивиденды растут с постоянной скоростью, то в t-м году ожидается получить

$$d_{акц,t} = d_{акц,0}(1+g)^t. \tag{5.13}$$

Здесь g – годовой темп прироста дивиденда. Обозначим через r – ставку альтернативного вложения средств с тем же уровнем риска, $g < r$, $d_{акц,0}$ – дивиденд за текущий (базовый) год. Внутренняя стоимость акции при постоянных темпах роста, как и при нулевом росте, является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии и составляет:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_{акц,t}}{(1+r)^t} = d_{акц,0} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t} = \frac{d_{акц,0}}{r-g}.$$

Получаем следующую формулу:

$$P_{вн} = \frac{d_{акц,0}}{r-g}. \tag{5.14}$$

Если дивиденды растут во времени по *линейному закону* (например, при решении выплачивать дивиденды ежеквартально, каждый квартал увеличивая рублевую ставку дивиденда на 1 руб.):

$$d_{акц,t} = d_{акц,0} + gt,\ t = 0,1,...$$

то внутреннюю стоимость акций можно оценить по формуле:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_{акц,t}}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_{акц,0} + gt}{(1+r)^t}.$$

Ввиду (3.10), имеем:

$$P_{вн} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_{акц,0} \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n} + \frac{g \cdot ((1+r)^{n-1} - 1)}{r^2 \cdot (1+r)^n} + \frac{g \cdot ((1+r)^{n-1} - 1)}{r \cdot (1+r)^n} \right),$$

откуда, ввиду формулы (3.15), получаем следующее выражение:

$$P_{вн} = \frac{1}{r}\left(d_{акц,0} + \frac{g}{r} \right).$$

Если инвестор планирует владеть акцией некоторое время, а затем продать ее, то для расчета внутренней стоимости акции используется формула:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_{акц,t}}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}, \tag{5.15}$$

где P_n – цена акции в конце n-го года, когда инвестор планирует ее продать.

При инвестировании средств в акции можно рассчитать все показатели из п. 5.1. Приведем эти формулы с учетом принятых обозначений.

Рассматриваются следующие показатели:

- чистый приведенный доход по акциям;
- индекс доходности;
- внутренняя черта доходности.

Чистый приведенный доход по акции (иногда называют *чистой стоимостью акции)* равен разнице между внутренней стоимостью $P_{вн}$ и текущей рыночной ценой акции P:

$$NPV = P_{вн} - P. \qquad (5.16)$$

Формула (5.16) с учетом принятых обозначений эквивалентна формуле (1.12).

Также можно рассчитать *индекс доходности*:

$$PI = P_{вн}/P.$$

Используя процедуру, основанную на методе капитализации дохода, оценщики приравнивают внутреннюю стоимость акции к ее рыночной цене $P_{вн} = P$ и находят *«обещанную»* от операций с акцией доходность (внутреннюю норму доходности, *IRR*, см. 5.1), $r_{об}$ из соотношения:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_{акц,t}}{(1+r_{об})^t} + \frac{P_n}{(1+r_{об})^n}. \qquad (5.17)$$

«Обещанную» доходность оценщики сравнивают с минимально привлекательной, по их мнению, доходностью.

Пример 5.6. Определите внутреннюю стоимость акции и сделайте вывод, является ли акция кандидатом на покупку или продажу, если компания обещает выплачивать дивиденды в размере 12 руб. на одну акцию в течение неопределенного периода в будущем при ставке доходности 20%. Текущий рыночный курс акции 65 руб.

Решение. Сначала воспользуемся формулой (5.12):

$$P_{вн} = \frac{d_{акц,0}}{r} = \frac{12}{0,2} = 60\,\text{руб}.$$

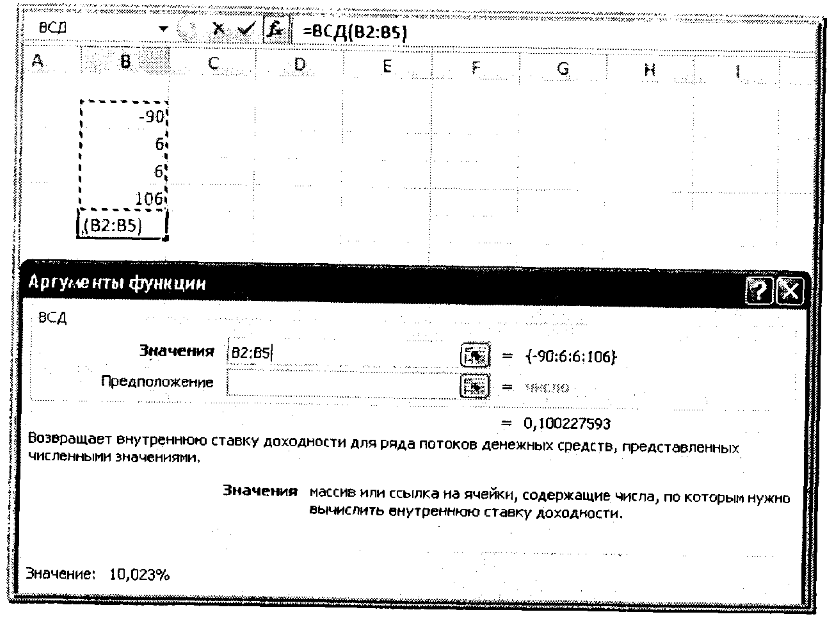
Применяя формулу (5.16), находим $NPV = P_{вн} - P = -5$ руб.Поскольку $NPV < 0$, то акция считается переоцененной рынком на 5 руб., следовательно, она будет кандидатом на продажу.

Пример 5.7. Найдите «обещанную» доходность операции с акцией, если ее текущая рыночная цена 90 руб., а инвестор предполагает владеть ею 3 года, получать дивиденды в размере 6 руб. каждый год и в конце третьего года продать за 100 руб. Кроме того, инвестор предполагает, что «правильная» доходность от операции с данной акцией должна составлять 9,5%.

Решение. Для нахождения $r_{об}$ составляем уравнение, применяя формулу (5.17):

$$90 = \sum_{t=1}^{2} \frac{6}{(1+r_{об})^t} + \frac{106}{(1+r_{об})^3}.$$

Для получения приближенного решения этого уравнения воспользуемся финансовой функцией ВСД() MSExcel:



В результате получаем приблизительно 10,02%. Поскольку $r_{об} \approx 10{,}02\%$, то акция недооценена рынком и является кандидатом на покупку.

Рассчитывая внутреннюю стоимость акции при ставке 9,5%, получаем:

$$\sum_{t=1}^{2} \frac{6}{(1+0{,}095)^t} + \frac{106}{(1+0{,}095)^3} \approx 91{,}22\ руб.$$

Текущую доходность акции $D_{тек}$ рассчитывают как отношение размера дивидендов к рыночной цене:

$$D_{тек} = \frac{d_{акц}}{P}. \qquad (5.18)$$

Если рыночная цена акции равна внутренней стоимости, а дивиденды растут постоянными темпами, то ввиду (5.14) имеем $D_{тек} = r - g$ (разность процентной ставки и годового темпа прироста дивидендов). Если инвестор владеет акцией определенный период времени n, а потом намерен ее продать по цене P_n, ему необходимо оценить *среднегодовую доходность операции с акцией за данный период* ($D_{оп}$):

$$D_{оп} = \frac{d_{акц,ср} + \frac{P_n - P_0}{n}}{P_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n} d_{акц,t} + P_n - P_0}{nP_0}. \qquad (5.19)$$

Здесь $d_{акц,ср}$ – среднегодовое значение дивиденда в рублях, n – число лет от покупки до продажи акции, P_0 – цена покупки акции.

Большое значение для акционеров имеет отношение чистой прибыли компании, которую она заработала за рассматриваемый период, к числу акций. Этот показатель носит название *прибыль (доход) на одну акцию* при условии, что вся чистая прибыль к распределению будет выплачена в качестве дивидендов. *Прибыль на акцию* (Earning per ordinary share) определяют по формуле:

$$EPS = \frac{П - N_{обл} d_{куп} - N_{пр.ак} d_{пр.ак}}{N_{об.ак}}, \qquad (5.20)$$

где $П$ – чистая прибыль, $d_{куп}$ – купонный доход по облигации, $d_{пр.ак}$ – дивиденд по привилегированной акции, $N_{обл}, N_{пр.ак}, N_{об.ак}$ – число облигаций, размещенных привилегированных и обыкновенных акций соответственно.

EPS показывает, насколько высока рыночная стоимость компании, поскольку выражает долю чистой прибыли в денежных единицах, приходящейся на одну обыкновенную акцию. Увеличение этого показателя свидетельствует о росте компании – эмитента. Покупка акций такой компании выгодна, поскольку помимо дивидендов можно ожидать также рост курса акций.

Однако общая сумма дивидендов по обыкновенным акциям, которую АО выплачивают своим акционерам, бывает меньше чистой прибыли к распределению. Оставшуюся часть называют *нераспределенной прибылью*, ее определяют по данным бухгалтерской отчетности. Она может быть направлена в резервный фонд АО.

Пример 5.8. Прибыль компании в текущем году после уплаты налогов составила 1 млн руб. У компании размещено 50 тыс. обыкновенных акций. Определите прибыль на одну акцию и размер нераспределенной прибыли, если в текущем году дивиденд на одну обыкновенную акцию составит 15 руб.

Вычисления проводим по формуле (5.20):

$$EPS = \frac{1 \text{ млн руб.}}{50 \text{ тыс. руб.}} = 20 \text{ руб.}$$

Нераспределенная прибыль на одну акцию составит 5 руб., а общая сумма нераспределенной прибыли составит 250 тыс. руб.

Рассмотрим также другие критерии эффективности инвестиций в акции.

1. *Дивиденды на акцию* (Dividends per ordinary share):

$$DPS = \frac{\text{Дивиденды по обыкновенным акциям}}{\text{Число обыкновенных акций}}.$$

Этот коэффициент показывает, какая сумма дивидендов распределяется на каждую обыкновенную акцию. Повышение дивидендов, как правило, свидетельствует о росте прибыли компании и является сигналом повышения курсовой стоимости акций.

2. *Соотношение рыночной цены обыкновенной акции и прибыли на акцию* (Price to Earning):

$$P/E = \frac{P}{EPS} = \frac{\text{Рыночная цена одной обыкновенной акции}}{\text{Прибыль на одну обыкновенную акцию}}. \qquad (5.21)$$

P/E показывает, за сколько лет прибыль на одну акцию окупает ее цену (если первый показатель рассчитан по годовой отчетности). Если на рынке ценных бумаг уверены в хороших перспективах компании, срок окупаемости ее акций возрастает, так как увеличивается рыночная цена акции вследствие увеличения спроса на нее. Для компании такая ситуация является благоприятной, поскольку создаются условия для увеличения ее рыночной капитализации. Высокие значения показателя позволяют инвестору рассчитывать на высокие темпы прироста дивидендов. Показатель P/E считается специалистами наиболее широко используемым на рынке ценных бумаг, его значения публикуют в котировке акций в газетах и журналах. Однако сопоставлять по этому показателю можно только компании одной отрасли.

3. *Соотношение рыночной цены обыкновенной акции и выручки от реализации на акцию* (Price to Turnover):

$$PT = \frac{\text{Рыночная цена одной обыкновенной акции}}{\text{Выручка от реализации на одну обыкновенную акцию}}. \qquad (5.22)$$

4. *Соотношение рыночной цены обыкновенной акции и собственных средств предприятия на акцию* (Price to Equity):

$$PE = \frac{\text{Рыночная цена одной обыкновенной акции}}{\text{Собственные средства на одну обыкновенную акцию}}. \qquad (5.23)$$

5. *Коэффициент выплаты* (Payout Ratio):

$$PR = \frac{\text{Дивиденды на все акции}}{\text{Чистая прибыль}}$$

показывает, какая доля чистой прибыли идет на выплату дивидендов акционерам. Рекомендуемое значение этого показателя 0,25 – 0,5.

1. *Поток наличности* (Cash Flow):

CF = Чистая прибыль + Износ внеоборотных активов –
– Прирост внеоборотных активов + Нерегулярные доходы
(поток наличности со знаком «плюс» от операционной деятельности) –
– Нерегулярные расходы
(поток наличности со знаком «минус» от операционной деятельности)

Этот параметр показывает, какая сумма оборотных активов остается в распоряжении компании после вычета расходов.

7. *Поток наличности на одну акцию* (Cash Flow per share):

$$CFS = \frac{CF}{Количество\ акций}.$$

При оценке часто используют показатель *общая доходность компании за период n*:

$$D_{об.к} = \frac{P_{к.п} - P_{н.п} d_{акц} n}{P_{н.п}}, \qquad (5.24)$$

где $P_{к.п}$, $P_{н.п}$ – рыночная цена акций компании на конец (цена продажи) и на начало (цена покупки) периода n.

Оценка стоимости облигаций

Облигация (лат. *obligatio* – обязательство; англ. *bond* – долгосрочная, *note* – краткосрочная) – эмиссионная долговая ценная бумага, закрепляющая право ее владельца на получение от эмитента облигации в предусмотренный в ней срок ее номинальной стоимости или иного имущественного эквивалента, право инвестора на получение регулярного или разового вознаграждения за предоставленные средства в виде процента от номинальной цены облигации или разницы между ценой покупки и ценой погашения.

Покупая облигацию, инвестор становится кредитором ее эмитента и получает преимущественное, по сравнению с акционерами, право на его активы в случае ликвидации или банкротства.

Как правило, облигации приносят владельцам доход в виде фиксированного процента от номинала (купонный доход), который должен выплачиваться независимо от размера прибыли и финансового состояния заемщика. Периодическая выплата доходов по облигациям в виде процентов производится по купонам. Купон представляет собой вырезной талон с указанной на нем величиной купонной (процентной) ставки.

По способам выплаты купонного дохода существуют облигации:

- с фиксированной купонной ставкой;
- с плавающей купонной ставкой, когда купон зависит от уровня ссудного процента;
- с равномерно возрастающей купонной ставкой по годам займа (индексируемые);
- бескупонные (бескупонная облигация не имеет купонов, а доход инвестора возникает за счет разницы между ценой погашения и ценой приобретения);
- смешанного типа.

В зависимости от эмитента выделяют государственные, муниципальные (местных органов управления), корпоративные (предприятий и АО) и иностранные (зарубежных заемщиков) облигации.

Облигации могут выпускаться с условием досрочного отзыва или погашения. В таком случае эмитент устанавливает условия востребования – по номиналу или с премией.

Конвертируемая облигация допускает обмен на акции того же эмитента или другие облигации. Конверсионный коэффициент показывает, какое количество акций можно получить в обмен на такую облигацию. Например, коэффициент 10:1 показывает, что при конверсии одной облигации можно получить 10 акций. Конверсионная цена представляет собой отношение номинальной цены облигации (например 100 руб.) к конверсионному коэффициенту (10) и в данном случае равняется 10 руб.

Существуют и другие виды облигаций. Однако самыми распространенными являются облигации, дающие право их владельцам на получение периодически выплачиваемого фиксированного дохода, и номинальной цены облигации – в будущем, при ее погашении.

Пример 5.9. Номинал облигации 1 тыс. руб., годовой купон 20%. Определить размер купона в рублях.

Решение. Рассчитываем размер годового купонного дохода $1000 \cdot 20\% = 200$ руб.

Как правило, размер купона объявляется на год. Однако он может выплачиваться чаще (раз в полгода, раз в квартал). Ясно, что чем чаще платежи по облигации, тем выгоднее ее владельцу.

Пример 5.10. Облигация номиналом 1 000 руб. имеет годовой купон 36%. По какой минимальной ставке должен выплачиваться ежеквартальный доход, чтобы владелец облигации не проиграл от смены схемы выплат?

Решение. Рассчитываем эквивалентную квартальную ставку: $(1+0{,}36)^{1/4} - 1 = 0{,}0799$, или 7,99%.

В зависимости от ситуации на рынке купонная облигация может продаваться по цене как ниже, так и выше номинала. Разность между номиналом облигации и ценой, если она ниже номинала, называют скидкой, или дисконтом. Например, номинал облигации 1 000 руб., цена – 960 руб., тогда скидка – 40 руб. Разность между ценой облигации и номиналом, если цена выше, называют премией. Например, цена облигации – 1020 руб., премия – 20 руб.

Котировку облигации принято давать в процентах. При этом номинал принимают за 100%. Чтобы узнать по котировке цену облигации, нужно номинал умножить на котировку.

Изменение доходности часто измеряют в базисных пунктах. Базисный пункт – это одна сотая часть процента. Таким образом, в одном проценте насчитывается 100 базисных пунктов. Например, если доходность облигации выросла с 20 до 20,4%, то в таком случае можно сказать, что доходность увеличилась на 40 базисных пунктов.

Доход по бескупонной облигации, если ее не предполагается продавать, представляет собой разницу между номиналом и ценой приобретения бумаги. Доход по купонной облигации – сумма купонных платежей и скидки (разница купонных платежей и премии). Премия уменьшает доход инвестора. Например, вкладчик купил облигацию с погашением через год номиналом 1000 руб. и купоном 20% за 960 руб. В конце года ему выплатят 200 руб. по купону. Поскольку облигация погашается по номиналу, вкладчик выиграет еще 40 руб. за счет разности между номиналом и уплаченной ценой. В зависимости от состояния рынка цена купонной облигации может быть выше или ниже номинала, однако к моменту ее погашения она должна ему равняться.

Оценка внутренней стоимости облигаций, так же как и оценка внутренней стоимости акций, основана на принципе дисконтирования всех доходов, которые она принесет:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_{куп,t}}{(1+r)^t} + \frac{P_н}{(1+r)^n}. \quad (5.25)$$

Здесь n – число лет, которые остаются до погашения бумаги (например, если облигация выпущена на 10 лет, а 7 лет уже прошло, то следует взять $n = 3$); $d_{куп,t}$ – годовой купонный доход; r – доходность по альтернативному варианту (или доходность до погашения облигации); P_t – номинальная цена.

Если купонные доходы из года в год постоянны, то из формулы (5.25) получаем:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_{куп}}{(1+r)^t} + \frac{P_н}{(1+r)^n} = \frac{d_{куп}((1+r)^n - 1)}{r(1+r)^n} + \frac{P_н}{(1+r)^n}. \quad (5.26)$$

Здесь $d_{куп}$ – годовой купонный доход, r – доходность по альтернативному варианту (или доходность до погашения облигации), $P_н$ – номинальная цена.

Если купон по облигации выплачивается m раз в году, то внутренняя стоимость облигации рассчитывается по формуле:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{mn} \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)^t} + \frac{P_н}{(1+r/m)^{mn}}.$$

Пользуясь суммой nm членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)^m}$ и знаменателем $\frac{1}{(1+r/m)}$, преобразуем правую часть этой формулы:

$$\sum_{t=1}^{mn} \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)^t} = \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)} + \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)} \cdot \frac{1}{(1+r/m)} + \ldots + \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)} \cdot \frac{1}{(1+r/m)^{mn-1}} =$$

$$= \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r/m)^{mn}}}{1 - \frac{1}{(1+r/m)}} = \frac{d_{куп}/m}{(1+r/m)} \cdot \frac{(1+r/m)^{mn} - 1}{(1+r/m)^{mn-1} r/m} =$$

$$= \frac{d_{куп}}{(1+r/m)^{mn}} \cdot \frac{(1+r/m)^{mn} - 1}{r}.$$

Приходим к окончательному виду формулы расчета внутренней стоимости облигации с выплатой купона m раз в году:

$$P_{вн} = \frac{d_{куп}((1+r/m)^{mn} - 1)}{r(1+r/m)^{mn}} + \frac{P_н}{(1+r/m)^{mn}}. \quad (5.27)$$

Пример 5.11. Номинал облигации равен 1 тыс. руб., купон, выплачиваемый 1 раз в год, – 20 %, до погашения остается 3 года. На рынке доходность инвестиций с уровнем риска, соответствующим данной облигации, оценивают в 15 %. Определить внутреннюю стоимость бумаги.

Решение. Непосредственно по формуле (5.26) получаем:

$$P_{вн} = \frac{200(1{,}15^3 - 1)}{0{,}15 \cdot 1{,}15^3} + \frac{100}{1{,}15^3} = 1\,114{,}15 \text{ руб.}$$

Поскольку купонные облигации имеют 2 вида дохода, они характеризуются купонной, текущей и валовой доходностью. Купонная доходность задается при выпуске и определяется ставкой купона. Ее размер зависит от двух факторов: срока займа и надежности эмитента. Как правило, наиболее надежным заемщиком считается государство. «Чистой» ценой облигации называют ее текущую рыночную цену.

Накопленный купонный доход исчисляется следующим образом:

$$H_{КД} = \frac{(d_{куп}/m) \cdot t}{T/m} + \frac{P_н kt}{T}, \quad (5.28)$$

где $d_{куп}$ – купонный доход за 1 год, m – число выплат купонов в год, t – число дней со дня последней выплаты купона до дня продажи (покупки), T – используемая временная база (360, 365, 366), часто в мировой банковской практике применяется понятие «финансовый год» (360 дней в году, 30 дней в месяце), $P_н$ – номинал, k – ставка купона. Последнее правило применяется в Российской Федерации для расчетов процентных выплат по облигациям внутреннего валютного (ОВВЗ) займа и еврооблигациям.

Рассчитанное значение купонного дохода представляет собой часть купонного дохода, на которую будет претендовать продавец. Свое право на получение части купонного дохода он может реализовать путем включения накопленного купонного дохода в цену облигации.

«Грязная» цена равна сумме текущей цены и накопленного купонного дохода.

Курс продажи облигации («грязная цена»/рыночная цена покупки) исчисляется по формуле:

$$K = \frac{P + H_{КД}}{P_{н.п}}, \tag{5.29}$$

где $P_{н.п}$ – рыночная цена на начало периода (покупки). Если облигация куплена по номиналу, то $P_{н.п} = P_н$.

Текущая доходность облигаций с фиксированной ставкой купона определяется по формуле:

$$D_{тек} = \frac{d_{куп}}{P}, \tag{5.30}$$

где $d_{куп}$ – купонный доход за 1 год, P – текущая рыночная цена облигации.

Доходность к погашению (валовая доходность) представляет собой годовую доходность, которую обеспечит себе инвестор, если, купив облигацию, продержит ее до погашения:

$$D_{пог} = \frac{d_{куп} + (P_н - P)/n_{пог}}{P}, \tag{5.31}$$

где $d_{куп}$ – купонный доход за 1 год, $P_н$ – номинал, P – текущая рыночная цена, $n_{пог}$ – число лет до погашения.

5.3. Вычисление коэффициентов финансовой отчетности

Разработке финансовой стратегии предприятия на перспективу предшествует анализ финансового состояния предприятия. Затем происходит мониторинг отклонений фактических показателей от запланированных. Первичные показатели берутся непосредственно из бухгалтерской документации. Вторичные нужно вычислять.

Приведем формулы для расчета основных финансовых вторичных показателей.

1.Коэффициент абсолютной ликвидности (Cash Ratio) рассчитывается по формуле:

$$CR = \frac{\text{Денежные средства} + \text{Кратк. фин. вложения}}{\text{Краткосрочные обязательства}}.$$

Этот коэффициент показывает, какая доля краткосрочных долговых обязательств фирмы может быть покрыта за счет денежных средств, высоко ликвидных ценных бумаг и депозитов. Он позволяет определить, имеются ли у предприятия ресурсы, способные удовлетворить требования кредиторов в критической ситуации. Рекомендуемое значение – 0,2 – 0,5 (20 – 50%).

2.Коэффициент срочной ликвидности (Quick Ratio) рассчитывается как отношение наиболее ликвидной части оборотных средств к краткосрочным обязательствам:

$$QR = \frac{\text{Ден. средства} + \text{Краткоср. фин. влож.} + \text{Дебиторская задолженность}}{\text{Краткосрочные обязательства}}.$$

Рекомендуемое значение – 0,8 – 1,0 (80 – 100 %).

3.Коэффициент текущей ликвидности (коэффициент покрытия), (Current Ratio) рассчитывается как отношение текущих активов (сюда включаются денежные средства, краткосрочные финансовые вложения, дебиторская задолженность и запасы) к текущим обязательствам и показывает, способно ли предприятие покрыть долги за счет активных ресурсов:

$$CrR = \frac{\text{Текущие активы}}{\text{Краткосрочные обязательства}}.$$

Рекомендуемое значение показателя – 1 – 2 (100 – 200 %).

4.Коэффициент финансовой независимости (Equity to Total Assets):

$$EA = \frac{E}{TA} = \frac{\text{Собственные средства}}{\text{Актив баланса}}.$$

Рекомендуемое значение коэффициента – 0,5 – 0,8 (50 – 80%). Чем ниже значение коэффициента финансовой независимости, тем больше объем заимствований у компании и выше риск неплатежеспособности. Считается, что предприятие с высокой долей собственного капитала более привлекательно для инвесторов и кредиторов, поскольку оно может погасить долги за счет собственных средств. Установление критического уровня в размере 50% обусловлено следующими причинами: если в определенный момент кредиторы предъявят все долги к взысканию, то компания сможет продать половину своего имущества, сформированного за счет собственных источников, даже если вторая половина имущества окажется по каким-либо причинам неликвидной.

5.Коэффициент финансовой зависимости (Total Debt to Total Assets) – отношение суммарных обязательств к суммарным активам:

$$\frac{TD}{TA} = 1 - \frac{E}{TA} = \frac{\text{Долгосрочные обязательства} + \text{Краточные об – ва}}{\text{Актив баланса}}.$$

Рекомендуемое значение коэффициента – 0,2 – 0,5 (20 – 50 %).

6.Коэффициент отношения заемного и собственного капитала (Total Debt to Equity) рассчитывается по формуле:

$$\frac{TD}{E}=\frac{\text{Долгосрочные обязательства + Краточные обязательства}}{\text{Собственные средства}}.$$

Чем меньше значение этого показателя, тем более стабильным является финансовое положение предприятия.

Рекомендуемое значение – 0,25 – 1 (25 – 100%).

Для расчета показателей рентабельности используется следующая формула:

Рентабельность = Прибыль/Затраты
(по каждой операции).

Поскольку собственников и инвесторов могут интересовать различные направления расходования средств, вычисляют несколько показателей рентабельности. Приведем некоторые из них.

1. Коэффициент рентабельности продаж (Return on Sales), вычисляется в процентах по данным отчета о прибылях и убытках по формуле:

$$ROS=\frac{\text{Чистая прибыль}}{\text{Выручка от реализации}}.$$

Этот коэффициент показывает размер удельной чистой прибыли, то есть размер чистой прибыли на 1 денежную единицу выручки от реализации.

2. Коэффициент рентабельности инвестиций (Return on Fixed Investment):

$$ROI=\frac{\text{Чистая прибыль}}{\text{Собственные средства + Долгосрочные обязательства}}.$$

Этот коэффициент показывает, насколько прибыльно использованы вовлеченные в производство средства. Показатель является важным при оценке конкурентоспособности, кредитоспособности и инвестиционной привлекательности предприятия.

Акционеру важно знать, какую часть чистой прибыли акционерного общества выплатят в виде дивидендов, это позволит ему сопоставлять различные варианты инвестирования средств и оценивать перспективы роста своих доходов. Вычисляют коэффициент выплаты (Payout Ratio):

$$PR=\frac{\text{Дивиденды на все акции}}{\text{Чистая прибыль}}.$$

Рекомендуемое значение этого показателя – 0,25 – 0,5.

Благополучие предприятия в финансовом плане зависит от притока денежных средств, необходимых для погашения обязательств. В целях контроля ведения бизнеса и перспектив его развития вычисляют показатель,

называемый «поток наличности». Поток наличности (Cash Flow; CF) показывает, какая сумма оборотных активов остается в распоряжении компании после вычета расходов, вычисляется этот показатель по формуле:

CF = Чистая прибыль + износ внеоборотных активов –
– Прирост внеоборотных активов + Нерегулярные доходы
(поток наличности со знаком «+» от операционной деятельности) –
– Нерегулярные расходы
(поток наличности со знаком «-» от операционной деятельности).

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С УЧЕТОМ РИСКА

6.1. Риски по облигациям

Кроме таких показателей риска, как среднеквадратическое отклонение доходности, дисперсия и коэффициент вариации, по инструментам с фиксированным сроком рассчитывают показатель, характеризующий «медленность» возврата денег. Рассмотрим его.

Понятие «дюрация» (англ. duration – длительность) впервые было введено американским ученым Фредериком Маколи (F. Macaulay) в 1938 г. Этот показатель играет важную роль при анализе долгосрочных ценных бумаг с фиксированным доходом. Дюрация применяется в качестве одного из косвенных подходов к количественной оценке риска долговых инструментов. В целях упрощения предположим, что купонный платеж осуществляется 1 раз в год. Обозначим $d_{куп,t}$ – величина платежа по купону за t-й период, руб., n – число лет (срок) погашения, r – процентная ставка, равная доходности к погашению или рыночной процентной ставке, $v=(1+r)^{-1}$ – дисконтирующий множитель при данной процентной ставке, $P_{вн}$ – текущая (внутренняя) стоимость потока доходов и поступлений по облигации:

$$P_{вн}=\sum_{t=1}^{n} d_{куп,t}v^t+P_H v^n,$$

где P_H – номинальная цена облигации, S_t – доход по облигации в конце года t:

$$S_t=d_{куп,t},\quad t=1,\ldots,n-1;\qquad S_n=d_{куп,n}+P_H.$$

Тогда дюрацию Маколи (D_M) с учетом процентной ставки r определяют следующим образом:

$$D_M=\frac{\sum_{t=1}^{n} t d_{куп,t}v^t}{P_{вн}}+\frac{nP_H v^n}{P_{вн}}=\frac{\sum_{t=1}^{n} t d_{куп,t}v^t}{\sum_{t=1}^{n} d_{куп,t}v^t+P_H v^n}+\frac{nP_H v^n}{\sum_{t=1}^{n} d_{куп,t}v^t+P_H v^n},$$

или

$$D_M=\frac{\sum_{t=1}^{n} tS_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} S_t v^t}=\frac{\sum_{t=1}^{n} tS_t v^t}{P_{вн}}.$$

При расчете дюрации часто используют условие равенства текущей рыночной цены облигации (P) и ее внутренней стоимости, т.е. в качестве процентной ставки рассматривают внутреннюю норму доходности по облигации. Тогда формула дюрации примет вид:

$$D_M=\frac{\sum_{t=1}^{n} tS_t v^t}{P}.$$

Пример 5.13. Облигация номиналом 1 000 руб. и ставкой купонного дохода 7%, выплачиваемого 1 раз в год, имеет срок обращения 3 года. Определим дюрацию данного обязательства, принимая рыночную процентную ставку (доходность к погашению), равной 10%. Для расчета составим таблицу:

t	$d_{куп\ t}$, руб.	P_H	S_t	$v=(1+r)^{-1}$	v^t	$S_t v^t$	$t S_t v^t$
1	70		70	0,90909	0,90909	63,6364	63,6364
2	70		70	0,90909	0,82645	57,8512	115,702
3	70	1000	1070	0,90909	0,75131	803,907	2411,72
						925,394	2591,06

Дюрация = 2591,06/925,394 = 2,79995.

Для расчета дюрации в MSExcel используется функция ДЛИТ().

6.2. Модель оценивания финансовых активов

Модель Capital Asset Pricing Model (CAPM) была предложена Уильямом Шарпом в 1964 году. Эту модель иногда называют SLM-моделью (Sharpe, Lintner, Mossin), поскольку считается, что она была независимо от Шарпа получена Джоном Линтнером (1965 г.) и Яном Моссином (1966 г.).

Рассматривается абстрактный рыночный инвестиционный портфель, включающий все котируемые на рынке ценные бумаги, причем пропорция вложения в конкретную бумагу равна ее доле в общей капитализации рынка. Модель CAPM является однофакторной регрессионной моделью, в которой в качестве единственного универсального фактора выбрана доходность рыночного портфеля.

Мерой риска служит коэффициент «бета» (β), определяющий соотношение доходности рассматриваемого актива или портфеля с уровнем доходности рыночного инвестиционного портфеля. Предполагается также, что по всем ценным бумагам имеются исторические данные о доходностях, на основании которых могут быть получены оценки математических ожиданий и дисперсий.

Формальная запись итогового уравнения данной модели выглядит следующим образом:

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_r + \varepsilon_i,$$

где $m_i = E(R_i)$ – ожидаемый доход (математическое ожидание случайной величины доходности R_i на конкретную, i-ю, ценную бумагу) при условии равновесия рынка; β_i – «бета-коэффициент» i-ой ценной бумаги – мера рыночного риска акции (измеряет степень изменчивости доходности ценной бумаги рассматриваемого вида по отношению к доходности среднерыночного портфеля); $m_r = E(R_r)$ – средняя рыночная доходность.

С точки зрения предельного анализа, коэффициент β_i равен производной $m_i = m_i(m_r)$ по m_r. Он приближенно показывает, насколько изменится ожидаемая доходность i-й ценной бумаги при изменении рыночной доходности на единицу, и является коэффициентом наклона характеристической линии акции, представляющей собой графическое изображение уравнения регрессии, построенного по статистическим данным о доходности i-й акции и среднерыночной доходности.

Оценка параметров регрессионной модели осуществляется с помощью метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_r)}{\sigma_r^2}; \alpha_i = \overline{m}_i - \hat{\beta}_i \overline{m}_r,$$

где $\operatorname{cov}(R_i, R_r)$ – ковариация между доходностью акции i-й бумаги и доходностью рыночного портфеля; ${\sigma_r}^2$ – дисперсия доходности рыночного портфеля; β – коэффициент для рынка в целом всегда равен единице.

Для получения оценок уравнения регрессии можно воспользоваться прикладными программами («Регрессия» пакета анализа MSExcel, инструментарием программы Gretl, статистическими функциями любых электронных таблиц).

Пример. Определить коэффициенты – бета и дополнительные статистические параметры, характеризующие надежность уравнения регрессии в целом, и стандартные ошибки коэффициентов регрессии двух акций (A и B).

Данные о динамике ежемесячных показателей текущей доходности этих акций и доходности некоторого базового портфеля акций (рыночной доходности) приведены в таблице:

Ежемесячные характеристики доходностей акций

Месяцы	Доходность акций		
	A	B	Рыночная
1	2	2,8	2,5
2	0,8	1,8	1
3	2,3	3,2	3
4	3,5	4,5	4,1
5	3,2	4,2	3,7
6	4,2	2,5	4
Итого	16	19	18,3
Средняя доходность	2,67	3,17	3,05

Решение. На основе приведенных в таблице данных с помощью функций MSExcel (ОТРЕЗОК, НАКЛОН) строим уравнения регрессий для акций A и B соответственно (в качестве независимой переменной выбираем рыночную доходность):

$$\hat{m}_A = -0{,}36 + 0{,}99 m_r, \ \hat{m}_B = 1{,}21 + 0{,}64 m_r.$$

Для вычисления коэффициента детерминации нужно возвести в квадрат коэффициент корреляции Пирсона, полученный применением формулы КОРРЕЛ, или же воспользоваться функцией КВПИРСОН, для расчета волатильности можно взять корень квадратный из числа, полученного с помощью функции ДИСП – дисперсии, или воспользоваться функцией СТАНДОТКЛОН.

Для вычисления ошибок коэффициентов пользуемся формулами:

Стандартное отклонение коэффициента отрезка (α)^2 =
= (Сумма квадратов значений зависимой переменной ×
× Квадрат стандартной ошибки регрессии) /
/ (Число наблюдений × Сумма квадратов отклонений от среднего);

(Стандартное отклонение коэффициента наклона (β))^2 =
= (Квадрат стандартной ошибки регрессии) /
/ (Число наблюдений × Сумма квадратов отклонений от среднего);

Функции СТОШYX, СУММКВ, КВАДРОТКЛ – стандартные статистические функции MSExcel.

Полученные результаты представим в таблице:

РЕГРЕССИОННАЯ СТАТИСТИКА:

Показатель	А относительно рынка	В относительно рынка	
ОТРЕЗОК(α)	-0,363542418	1,21396299	
НАКЛОН (β)	0,993511175	0,640230714	
Уравнение регрессии	$\hat{m}_A = -0{,}36 + 0{,}99 m_r$	$\hat{m}_B = 1{,}21 + 0{,}64 m_r$	
Коэффициент корреляции	0,962223248	0,732816292	
Коэффициент детерминации	0,925873579	0,537019717	
Волатильность ($\sqrt{\sigma^2}$)	1,216004386	1,028915286	1,177709642
Станд.ош.регр.(СТОШYX)	0,37014907	0,782737019	
Квадрат ошибки	0,137010334	0,612677241	
Сумма квадратов значений зависимой переменной-рыночной дох.			62,75
Сумма кв.отклонений от ср.значений зависимой переменной			6,935
Квадрат ошибки коэф. α	0,206618564	0,923948495	
Ошибка коэффициента α	0,454553148	0,961222396	
Квадрат ошибки коэф. β	0,019756357	0,088345673	
Ошибка коэффициента β	0,140557308	0,29723	

6.3. Задача минимизации риска инвестиционного портфеля

Рассмотрим математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля, которую предложил американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz) в 1952 году.

Пусть в портфель планируется включить n видов активов. Обозначим доли активов в портфеле через $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. Кроме того, считаем $\theta_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть R_i – случайная величина, характеризующая доходность i-го актива при условии, что все средства вложены только в него. Математическое ожидание доходности i-го актива обозначим m_i ($m_i = E(R_i)$). Доходность портфеля – это случайная величина $R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i \theta_i$ с математическим ожиданием $m_p = \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i$ и дисперсией $D(R_p) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j$. Мерой риска может служить корень квадратный из дисперсии.

Минимизируем квадрат риска (дисперсию портфеля):

$$F(\theta) := D(R_p) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j ,$$

где $b_{ij} = \mathrm{cov}(R_i, R_j)$.

Если в портфель включены статистически независимые друг от друга активы, то ковариационная матрица $B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ является диагональной, по диагонали стоят выборочные дисперсии активов.

Предположим, что требуемый уровень доходности портфеля задан и составляет m_p.

В результате получаем оптимизационную задачу:

$$F(\theta) := \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j \to \min ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i = m_p, \quad \theta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n},$$

для решения которой можно применить один из известных методов, например, метод множителей Лагранжа, графический метод или метод исключения переменных, а также можно воспользоваться одной из стандартных математических программ или электронных таблиц, включающих инструментарий численных методов решения задач квадратичного программирования.

Двойственной к задаче Марковица минимального риска является задача максимальной эффективности (F^* – минимальное значение целевой функции задачи):

$$Ef(\theta) := \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i \to \max ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j = F^*, \quad \theta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пример. Рассмотрим портфель, состоящий из трех видов независимых ценных бумаг с ожидаемыми доходностями 10, 20 и 15% и рисками (корень квадратный из дисперсии) 15, 40 и 12 соответственно. В таком случае ковариационная матрица является диагональной (по диагонали стоят дисперсии):

$$B = \begin{pmatrix} 225 & 0 & 0 \\ 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}.$$

Требуется сформировать портфель из трех видов ценных бумаг с минимальным риском потерь капитала и ожидаемой доходностью 15%. Следовательно, нужно найти, в каких долях $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ должны входить ценные бумаги в портфель. Получаем следующую задачу:

$$F(\theta) := 225\theta_1^2 + 1600\theta_2^2 + 144\theta_3^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 1,$$

$$10\theta_1 + 20\theta_2 + 15\theta_3 = 15,$$

$$\theta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Решая задачу методом множителей Лагранжа, приходим к системе:

$$2 \cdot 225\theta_1 + \lambda + 10\mu = 0,$$

$$2 \cdot 1600\theta_2 + \lambda + 20\mu = 0,$$

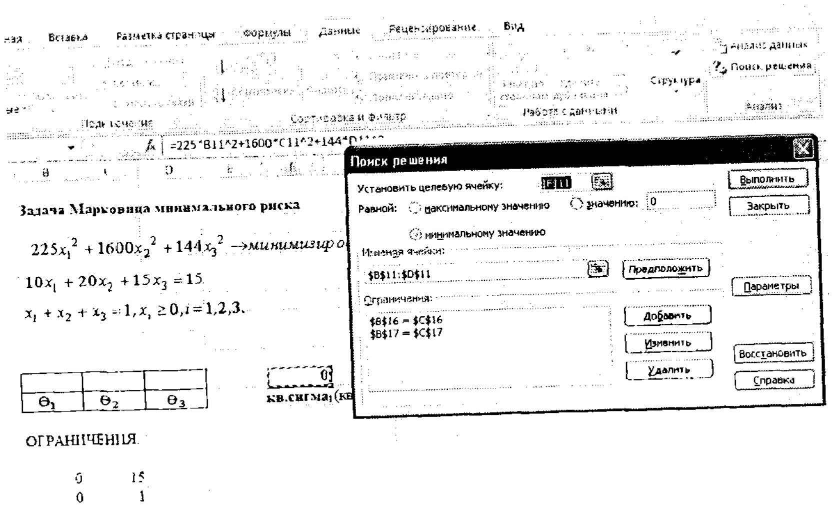
$$2 \cdot 144\theta_3 + \lambda + 15\mu = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 1,$$

$$10\theta_1 + 20\theta_2 + 15\theta_3 = 15.$$

Ответ: $\theta_1 = 0{,}12$; $\theta_2 = 0{,}12$; $\theta_3 = 0{,}76$.

Используя надстройку MSExcel «Поиск решения»:



получим такой же результат.

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ»

А) Задачи, рекомендуемые для проведения практических занятий со студентами

1. Предприятие получило кредит на один год в размере 10 млн руб. с условием вернуть 13 млн руб. Рассчитать процентную и учетную ставки.

2. На счете в банке 1,2 млн руб. Банк платит 11,5% годовых. Предлагается войти всем капиталом в совместное предприятие, при этом прогнозируется удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

3. Если г-н X вложит сейчас некоторую сумму денег с условием непрерывного начисления сложных процентов с интенсивностью δ, он получит через 2 года 1 000 дол. Если он вложит половину этих денег на 4 года при той же интенсивности непрерывного начисления сложных процентов, то через 4 года получит 600 дол. Найти исходную сумму вклада и интенсивность роста доходов δ.

4. Продавцом в уплату за товар, цена которого составляет 10 000 руб., выписано четыре векселя с погашением по полугодиям. Учетная ставка простых процентов d=10%. Определить процентные платежи и номинальные цены векселей с использованием банковской схемы.

5. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 5 млн руб. со сроком погашения 21.01.2010 г. Вексель предъявлен 13.01.2010 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 50% годовых. Какую сумму получит векселедержатель? Рассмотрите банковское и математическое дисконтирование.

6. Предлагается внести (сегодня) 140 тыс. руб. для оснащения станции технического обслуживания автомобилей, а затем через 6 месяцев еще 90 тыс. руб. через 1 год планируется получить доходы 280 тыс. руб. Принимается ли это предложение, если ту же сумму (280 тыс. руб.) можно получить через 1 год, вложив в банк сегодня 220 тыс. руб.?

7. Вклад в сумме 2 млн руб. помещен на банковский депозит с ежемесячным начислением сложных процентов по ставке 1% в месяц. Требуется найти реальный ожидаемый доход вкладчика за год, если в печати опубликованы прогнозы трех организаций о месячном темпе инфляции, согласно которым в месяц h = 0,006; 0,01 и 0,008 соответственно. Вероятности этих прогнозов: 0,3; 0,5; 0,2, соответственно.

8. Вклад 100 000 руб. на 6 мес. (простые проценты), процентная ставка (r) 10% годовых, ставка налога на процентные доходы по вкладам составляет 35%, ставка рефинансирования: а) 10,75% б) 8,75%. Оценить накопленную сумму и сумму налога для а) и б).

9. Сбыт продукции будет увеличиваться в течение двух лет – каждый квартал на 25 млн руб. Определить наращенную сумму к концу срока при условии, что поступление денег – постнумерандо. Накопительная ставка 10% годовых, начисление процентов ежеквартальное.

10.Долг в сумме 10 000 руб. необходимо погасить равными суммами в конце каждого года в течение 5 лет. В конце срока за использование денег нужно выплатить дополнительно 2 150 руб. Составить план амортизации займа, вычислить эффективную ставку.

11.Заем в сумме 300 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 6 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 20% годовых (схема погашения долга дифференцированными платежами). Составить план погашения.

12.Вы заняли на 4 года 10 000 дол. под 14% годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток (аннуитетная схема погашения). Составьте план погашения. Определить общую сумму процентов к выплате.

13.Сумма 12 000 выдана в долг на год на условиях расчетов по схеме потребительского кредитования под 16% годовых (основная сумма выплачивается в рассрочку равными платежами ежемесячно, а процентный годовой платеж начисляется сразу и также погашается ежемесячно). Рассмотреть схемы с ускоренным и замедленным списанием процентов по «методу 78-х»: а) вариант списания процентов в долях 1/78,2/78,…,12/78, соответственно, б) в долях 12/78,11/78,…,1/78. Рассчитать r_{ef}.

14.Для следующих задач условием является получение займа 15 тыс. дол. на 5 лет под 10 сложных процентов в год. Определить:

• размер ежегодного платежа по кредиту, если его возвращать равными суммами с учетом начисленных сложных процентов на непогашенный остаток,

• минимальный размер годового вклада на счет, если создать погасительный фонд со ставкой 8 % годовых по сложным процентам,

• минимальный размер ежемесячного вклада на счет, если создать погасительный фонд со ставкой 8 % годовых по сложным процентам, и начислять сложные проценты ежемесячно.

15.Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта, если ставка приведения 15%:

t	0	1	2	3	4
$-K$	– 200				
R_t		150	80	50	25

16.Проект, рассчитанный на 15 лет, требует инвестиций в размере 150 000 дол. В первые 5 лет никаких поступлений не ожидается. Однако в последующие 10 лет чистый доход составит 50 000 дол. в год. Следует ли принять этот проект, если ставка приведения составляет 15%?

17.Величина требуемых инвестиций по проекту равна 18 000 дол. Предполагаемые доходы: в первый год – 1 500 дол., в последующие 8 лет – ежегодно по 3 600 дол. Оценить целесообразность принятия проекта, если ставка приведения 10%.

18.Для каждого из следующих проектов инвестиций рассчитать NPV, PI, IRR, если ставка приведения 25%. Сделать вывод о целесообразности инвестиций:

t	0	1	2	3	4	5
A	– 100	–	30	–	200	
B	– 350	–	–	–	–	1000
C	– 300	250	150			

19.Рассматриваются альтернативные инвестиционные проекты A и B. Сделать выбор при годовой ставке приведения: а) 8%; б) 15%:

t	0	1	2	3
A	– 100	90	45	9
B	– 100	10	50	100

20.Рассматриваются альтернативные инвестиционные проекты A и B. Сделать выбор, если ставка приведения 10% годовых:

t	0	1	2	3
A	– 100	50	70	
B	– 100	30	40	60

21.Инвестор, имеющий 300 тыс. руб., может вложить свой капитал в акции А, В, С. Дивидендные ставки по акциям являются независимыми случайными величинами с математическими ожиданиями 8, 10 и 12% и стандартными отклонениями (σ), 1, 2 и 4% соответственно. Как нужно скомбинировать покупку разных акций, чтобы за первый год получить в среднем 30 тыс. руб. дивидендов при минимальной дисперсии?

22.Куплена ценная бумага за 47 тыс. руб. Через год по ней стали поступать дивиденды, тенденцию изменения которых можно приближенно представить в виде линейного закона $R(t)=11-t$, $t=\overline{1,10}$. Сразу после получения 1 тыс. руб. в виде дивидендов (через 10 лет) ценная бумага продана за 2 тыс. руб. Можно ли считать такую сделку удачной?

23.Работник получает 150 тыс. руб. в год и поступает в вуз. Если он поступит учиться на заочное отделение, то следующие 5 лет заработная плата будет увеличиваться по закону $R(t)=150+18\cdot t$, $t=\overline{1,5}$. Если он поступит на дневное отделение, то 5 лет работать не будет, предприятие сохранит за ним место, выплатив сразу 85% заработной платы за следующие 5 лет. После получения диплома заработная плата работника составит 300 тыс. руб. в год в любом случае. Какую форму обучения выбрать, если ставка приведения 8%?

Б) Задачи, рекомендуемые для итогового контроля

1. Г-н Х планирует внести на счет некоторую сумму под 9% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Сейчас денег у г-на Х нет, но работодатель согласен выплатить сейчас ему всю заработную плату на 1 год вперед, удержав при этом 8%. Оценить ситуацию, если допускается возможность довложения средств на банковский счет. При этом считать, что размер ежемесячной заработной платы постоянный, и на счет вносятся все деньги, получение заработной платы в конце месяца.

2. Фирме нужно накопить 200 тыс, дол. чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 8% при полугодовом начислении сложных процентов. Сколько должен составлять первоначальный вклад фирмы?

3. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 500000 руб. со сроком погашения 28.01.2012 г. Вексель предъявлен 13.12.2011 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 45% годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

4. В качестве оплаты за каждую из трех партий товара предприятие А получило от предприятия В вексель с процентной ставкой 16% годовых, содержащий обязательство погасить сумму 1, 2 и 3 млн руб., соответственно через 3, 5 и 6 лет. Эти векселя заменяются одним и тем же дисконтом и сроком 5,5 лет. На какую сумму должен быть выписан новый вексель, если в расчетах используется схема сложных процентов?

5. В фонд защиты животных ежегодно вносится 100 тыс. руб. в течение 8 лет (в конце года). Средняя годовая ставка по сложным процентам за этот период составляет 8%. Определить современную и наращенную величины потока.

6. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2 000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода сложные проценты из расчета 7% годовых. Сколько денег будет на счете через 4 года?

7. В формуле наращения по непрерывной схеме $S(\mathrm{T})=S(0)\cdot\exp(\delta T)$ определить следующие величины: а) мультиплицирующий множитель, б) эффективную ставку. В ответе используйте параметры δ, T.

8. Предположим, что на процентные доходы введен налог по ставке g. Тогда несложно получить формулу для расчетов (простые проценты): $S(\mathrm{T})=S(0)(1+T\cdot r\cdot(1-g))$. Определить мультиплицирующий множитель.

9. При оформлении вклада суммы S на 6 месяцев банк предлагает начислять ежемесячно сложные проценты – 8,5% годовых, при вкладе на срок 3 месяца начисляются простые проценты – 7,2% годовых. Вкладчик заключил договор на 6 месяцев, но через 3 месяца требует расторгнуть договор, сохранив 75% начисленных процентов. Удовлетворит ли банк его требования?

10. Один банк предлагает начислять по вкладам ежемесячно сложные проценты – 8,1% годовых, а другой ежеквартально – 8,3% годовых, минимальный срок вклада 3 месяца. Вычислить эффективные ставки для обоих случаев. Какой вариант предпочтительнее вкладчику?

11. Банк предлагает начислять по вкладам ежемесячно сложные проценты, ставка 9% годовых. Вычислить эффективную ставку.

В) Задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения

1. В банк вносится 10 тыс. руб., а затем ежемесячно взнос возрастает на 1 тыс. руб. По истечении 2-х лет вклад изымается вместе с начисленными сложными процентами 10% годовых (начисление процентов ежемесячное). Все эти деньги вкладываются в ценные бумаги, по которым бесконечно долго будет выплачиваться по 10 тыс. руб. в конце каждого года. Оценить целесообразность инвестирования. Рассчитать чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности.

2. Инвестор Р имеет 10 тыс. евро и рассматривает 3 альтернативные возможности инвестирования денег при ставке приведения 10%:

- вложить деньги в освоение целинных земель, с которых через 1 год можно будет получать по 3 тыс.евро в конце каждого из последующих 5 лет;
- купить вексель за 10 тыс.евро номиналом 13,5 тыс.евро сроком погашения через 3 года;
- купить привилегированные акции стабильного предприятия, ежегодно приносящие дивиденды 1 тыс.евро неограниченно долго.

3. По трех месячному вкладу банк предлагает клиенту платить 8% годовых, используя схему простых процентов. Затем с банком заключается дополнительное соглашение, согласно которому вклад пролонгируется до востребования, причем расчеты будут производиться по схеме сложных процентов. Определить размер ставки по сложным процентам, которая позволит клиенту получить предусмотренную первоначальным договором сумму в случае, если он изъявит желание снять деньги через 3 месяца.

4. Оценить целесообразность инвестирования 15 000 евро в строительство жилого помещения, которое планируется сдавать в аренду 36 лет, при условии, что годовая рента составляет 1 550 евро и первый платеж поступит через 1 год, а ставка приведения 10% годовых. Изменится ли результат, если считать, что рента будет длиться бесконечно долго?

5. Г-н Х взял в банке льготный кредит на возведение здания под частную клинику – 10 млн руб. и заключил с банком договор, согласно которому в течение следующих 10 лет он будет получать ежегодно по 5 млн руб. (в конце года) под 10% годовых по сложным процентам. Сразу после получения четвертого займа в 5 млн руб. (через 4 года) служба экономической безопасности при проверке состояние дел заемщика обнаружила, что на полученные от банка деньги был оснащен таксопарк, с которого г-н Х получает весьма солидные доходы, ежегодно расширяя деятельность. За нецелевое использование средств банк решил расторгнуть договор, взыскав с заемщика всю сумму кредита и проценты на сегодняшний момент, а также все проценты, которые заемщик должен был уплатить за остальные 6 лет по договору. Определите причитающуюся к возврату сумму, а также сумму, которую должен был заплатить заемщик, если бы расторжение контракта произошло без наложения штрафных санкций.

6. На строительство жилого дома нужно затратить сразу 50 млн евро Квартиры планируется сдавать в долгосрочную аренду. Чистый ежегодный доход от сдачи в аренду квартир оценивается в размере 6 млн евро. Срок службы дома – 64 года. Оцените целесообразность капиталовложений, если ставка приведения 10%. Существенно ли изменятся показатели эффективности капиталовложений, если считать, что дом будет служить бесконечно долго?

7. Инфляция прогрессировала за 10 лет следующими темпами: 8, 9, 10, 10, 9, 8, 8, 9, 8, 8%, соответственно. Какую минимальную ставку должен назначить банк, чтобы вкладчик, вложив деньги в начале срока, сохранил их через 10 лет.

8. На обучение новой профессии нужно затратить 5 лет (в течение этого времени человек будет заниматься только учебой). При прежней квалификации работник получал в месяц 5 тыс. руб. После получения диплома заработная плата возрастет до 12 тыс. руб. в месяц. Оцените финансовую целесообразность такого образования, если человек будет работать по окончании обучения не менее 30 лет, если ставка приведения 10% годовых.

9.В одном банке за использование денег клиента по пластиковой карте ежегодно начисляют сложные 2%, а в другом банке – ежемесячно сложные 0,18%. В каком банке держать деньги?

10.На оформление и оснащение автостоянки затрачивается сразу 150 тыс. руб., а затем, через 1, 2, …, 7 лет чистые доходы от стоянки составят, соответственно, 70, 60, …, 10 тыс. руб. Найти дисконтный срок окупаемости такого проекта, если ставка приведения составляет 18% годовых.

Указание: поскольку чистый приведенный доход становится положительным через 4 года ($NPV(4) = 3{,}47$ тыс. руб.), то за такой срок проект окупится.

11.Долг в размере 1 000 д.е. должен быть погашен через 1,5 года. При выдаче кредита использовалась переменная годовая процентная ставка: в первые три месяца срока долга – 8%, в следующие три месяца 8,5%, затем полгода 9 % и последние полгода – 10%. Какова сумма кредита?

12.Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50 000 д.е. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательств применяет сложную процентную ставку 5 – 7% годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

13.При выдаче кредита на 200 дней под 10% годовых кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на процент, превышающие базовую ставку (8,5%), составляет 35%. Какова доходность операции для кредитора? Найти эффективную ставку.

14.Реструктуризация государственного долга была произведена следующим образом: долг в сумме 1,4 млрд д.е., который должен быть выплачен 1 января 1995г., преобразован в облигации, выпущенные под гарантии правительства. По этим облигациям государство, начиная с 1 января 1995 года дважды в год выплачивает равные суммы до 2007 г. Для реструктуризации долга использовалась ставка (сложная) 3% годовых. Какова сумма отдельного погасительного платежа?

15.Обязательство об уплате 8 000 д.е. от 01.03 и 12 000 д.е. от 30.09 пересмотрено так, что первая выплата в сумме 6 000 д.е. будет произведена 01.02, а остальная часть долга гасится 15.11. Для замены обязательства применялась сложная процентная ставка – 6 % годовых. В финансовом году 365 дней. Необходимо:

1) определить сумму погашаемого остатка. Уравнение эквивалентности составьте относительно 01.03 и относительно 01.02. Что выражает уравнение эквивалентности в каждом случае? Зависит ли ответ от выбранного момента времени для составления уравнения эквивалентности?

2) какой суммой, выплачиваемой сегодня, можно было бы заменить старое обязательство?

16. Заем величиной 10 000 д.е. должен быть оплачен в течение 10 лет постоянной обычной рентой, выплачиваемой ежемесячно. Сумма ежемесячного платежа рассчитывается на основе ежемесячной процентной ставки 1%. Найти:

а) сумму ежемесячного взноса;

б) величину погашенного основного долга и выплаченных процентов к концу первого года;

в) номер платежа, после которого невыплаченный долг становится меньше 5000 д.е.

17. Г-н Х планирует занять $8\,000$ дол. на 1 год. Банк проанализировал его доходы за предыдущие 6 месяцев (800 дол., 850 дол., 890 дол., 910 дол., 960 дол., 990 дол. соответственно) и предложил схему возврата: в конце месяца t возвращать $770 + s(t-1)$ дол., t=1,…,12, s – скорость роста доходов. Рассчитать эффективную ставку.

Указание. Построить линейную регрессионную модель доходов с начала отсчета по месяцам: (линейная связь значима, поскольку

$$\left|t_{набл}\right| = \left|\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\right| = \left|\frac{0{,}995\cdot 2}{\sqrt{1-0{,}995^2}}\right| = 19{,}38$$

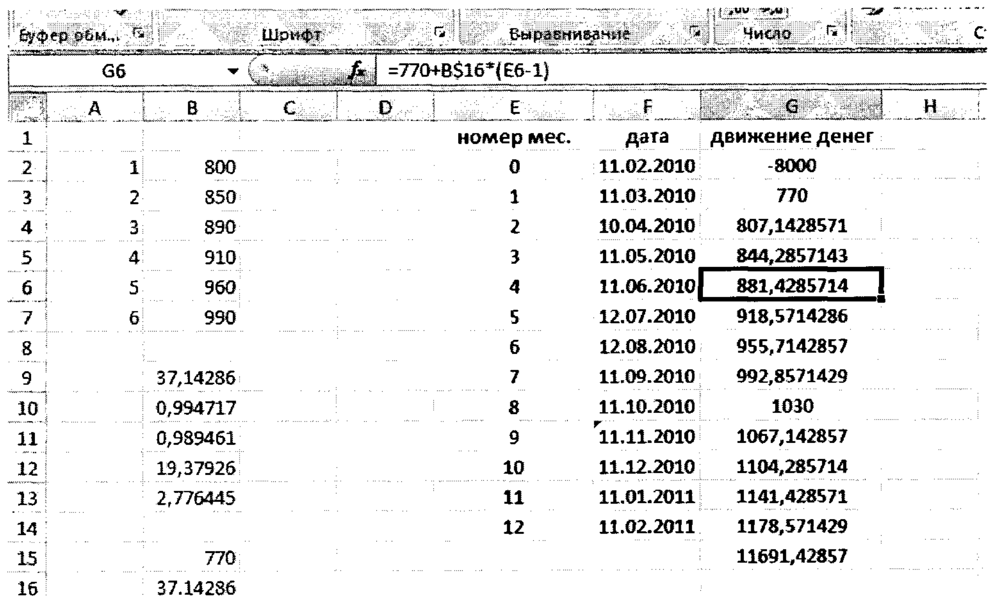
$$\left|t_{набл}\right| > t_{кр} = \text{СТЬЮДРАСПОБР}(0{,}05;6-2) = 2{,}78$$

(n=6 – число наблюдений, r – коэффициент корреляции между данными о доходах и номерами месяцев 1, 2, 3, 4, 5, 6, функция Excel КОРРЕЛ())). Модель роста доходов: оценка доходов за месяц

$$t = \text{ОТРЕЗОК}(800:990{,}1:6) + \text{НАКЛОН}(800:990{,}1:6)\cdot t = 770 + 37{,}14\cdot t$$

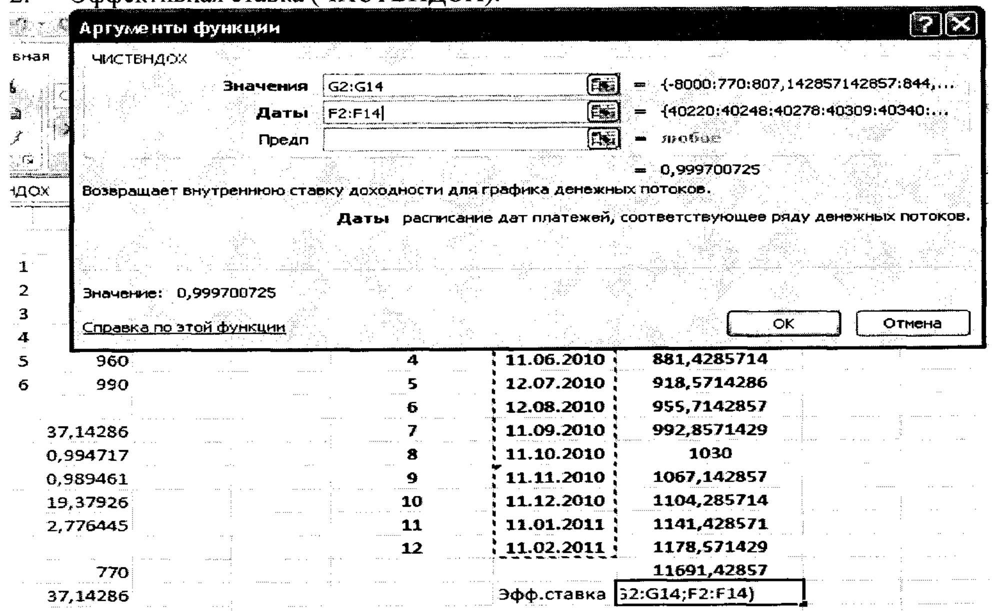
(ОТРЕЗОК, НАКЛОН – статистические функции MSExcel). Итак, ежемесячно доход растет в среднем на 37,14 дол.

1. Условно пусть долг взят 11.02.10. Знак «–» означает заем средств, «+» погашение. График:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1					номер мес.	дата	движение денег	
2	1	800			0	11.02.2010	-8000	
3	2	850			1	11.03.2010	770	
4	3	890			2	10.04.2010	807,1428571	
5	4	910			3	11.05.2010	844,2857143	
6	5	960			4	11.06.2010	881,4285714	
7	6	990			5	12.07.2010	918,5714286	
8					6	12.08.2010	955,7142857	
9		37,14286			7	11.09.2010	992,8571429	
10		0,994717			8	11.10.2010	1030	
11		0,989461			9	11.11.2010	1067,142857	
12		19,37926			10	11.12.2010	1104,285714	
13		2,776445			11	11.01.2011	1141,428571	
14					12	11.02.2011	1178,571429	
15		770					11691,42857	
16		37.14286						

2. Эффективная ставка (ЧИСТВНДОХ):



18. Определить коэффициенты бета и дополнительные статистические параметры, характеризующие надежность уравнения регрессии в целом, и стандартные ошибки коэффициентов регрессии двух акций (А и В).

Данные о динамике ежемесячных показателей текущей доходности этих акций и доходности некоторого базового портфеля акций («рыночная доходность») приведены в таблице:

Месяцы	Доходность акций		
	А	В	Рыночная
1	2	2,8	2,5
2	0,8	1,8	1
3	2,3	3,2	3
4	3,5	4,5	4,1
5	3,2	4,2	3,7
6	2,5	2,9	4,1
7	3,9	4,1	4
8	3,5	3,8	3,6
9	2,8	2,6	3,9
10	4,2	3,6	3,6
11	4,1	3,2	3,7
12	4,2	2,5	3,8

19. Используя актуарное правило, вычислить остаток долга на конец расчетного периода для следующих исходных данных: на 18 месяцев взят кредит 280 000р., 20% годовых, ежемесячно в течение 17 месяцев (в конце каждого месяца) происходит погашение долга по 10 000руб.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ (20 ВАРИАНТОВ)

ЗАДАНИЕ 1

1. На вклад в банке в размере **S** млн руб. сроком на **T** лет банк начисляет проценты по ставке **r**. Какая сумма накопится на счете к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: а) ежегодно; б) каждые полгода:

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
S, млн руб.	2,25	1,75	1	5	2
T, лет	5	4	1	2	3
r, %	10	9,5	6,5	8,25	7,75

2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: а) **r1** процентов при начислении сложных процентов раз в год; б) **r2** процентов при начислении сложных процентов ежеквартально:

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
r1, %	15	20	35	30	18
r2, %	14	19	31	29	17

3. Оплата за выполненную работу производится: а) векселем с номиналом **S1** тыс. руб., сроком погашения через **T1** лет, б) векселем с номиналом **S2** тыс. руб., сроком погашения через **T2** лет? Какой вариант расчетов а) или б) предпочтительнее при сложной ставке **r** процентов? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
r, %	20	15	8	10	30
S1, тыс. руб.	100	250	180	500	300
T1, лет	1	2	3	2	2
S2, тыс. руб.	140	200	200	600	400
T2, лет	3	1	4	3	4

4. **Долг в сумме D тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение T лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке g.** Составить план погашения.

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
D, тыс.руб.	200	300	400	900	600
T, лет	3	4	4	3	3
g, %	22	25	26	24	25

5. Для следующего инвестиционного проекта:

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
***K*, денеж. ед.**	100	200	400	500	500
R1, денеж. ед.	20	130	130	200	100
R2, денеж. ед.	100	100	300	350	500

рассчитать чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20% годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

ЗАДАНИЕ 2

1. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 100 тыс. руб. с датой погашения этой суммы **T1**. Вексель предъявлен **T2**. Банк согласился учесть вексель с дисконтом **d** процентов годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
T1	25.06.12	12.07.12	30.08.12	20.08.12	29.09.12
T2	11.06.12	01.07.12	20.08.12	30.07.12	05.09.12
d, %	70	67	69	71	68

2. В течение **T** лет ежегодно по схеме пренумерандо делается взнос в банк **R** тыс. дол. с начислением сложных процентов **r**. Чему равна сумма к получению в конце периода?

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
T, лет	10	14	15	18	12
R, тыс. дол.	20	30	15,5	10	15
r, %	8,5	9,5	10	10,5	9,5

3. Каков Ваш выбор: а) получение **S1** тыс. евро через 2 года или б) получение **S2** тыс. евро через 4 года, если годовой коэффициент дисконтирования (используется схема сложных процентов) равен **d** процентов. При каком значении коэффициента дисконтирования выбор безразличен?

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
S1, тыс. евро	36	24	24	7	9
S2, тыс. евро	40	30	30	8	11
d, %	10	11	12	10	9

4. Вы заняли 500 тыс. дол. на 4 года под **g** процентов. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток долга. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения долга.

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
g, %	12	15	18	20	10

5. Проект, требующий инвестиций в размере 100 тыс. дол., предполагает получение годового дохода в размере 20 тыс. дол. на протяжении 8 лет. Оценить целесообразность инвестиций, если ставка приведения равна **r** процентов.

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
r, %	10	15	8	12	11

ЗАДАНИЕ 3

1. Рассчитать наращенную сумму с исходной суммы в 2 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 15% годовых, а период наращения **t** дней.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
t, дней	31	182	456	92	274

2. Господин X желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по 7 000 дол. в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 16 лет, и установила процентную ставку **r** (используется схема сложных процентов). Сколько нужно заплатить за контракт?

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
r, %	6	8	10	12	14

3. Платежи в 2 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм, соответственно, через **T1**, **T2** и **T3** лет, объединяются в один со сроком погашения через 3 года 6 месяцев с использованием сложной ставки 20% годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
T1, лет	2,5	1,5	2,5	2,5	1,5
T2, лет	3	3	3	4,5	4,5
T3, лет	4,5	4,5	5,5	5,5	5,5

4. Решено вложить в банк **S** млн руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке **i**. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне **h** процентов. Какова наращенная сумма с учетом ее обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
S, млн руб.	4	5	6	3	8
i, %	23	18	14	13	12
h, %	10	12	8	9	9

5. Долг в сумме 800 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение **T** лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке **g** процентов. Составить план погашения.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
T, лет	5	6	4	7	8
g, %	10	20	15	12	8

ЗАДАНИЕ 4

1. Сумма 2 млн. руб. вложена в банк под **r** процентов. Сложные проценты начисляются ежегодно. Через период **T** владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление процентов ведется по комбинированной схеме?

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
r, %	10,5	9,5	10,75	8,75	9,25
T	2 года 3 мес.	2 года 1 мес.	2 года 5 мес.	1 год 3 мес.	1 год 6 мес.

2. Стоит ли покупать за 2 000 дол. ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере **R** дол. в течение 4 лет, если учетная ставка по сложным процентам составляет **d** процентов?

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
R, дол.	675	650	245	300	750
d, %	11,5	10,5	12,5	9,5	13,5

3. Г-н X вносит на счет 10 000 руб., затем через 6 месяцев еще столько же, а еще через **T** месяцев снимает сумму. Сколько накопится к концу срока, если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчета **r** процентов годовых.

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
T, мес.	3	4	3	4	3
r, %	10	8	12	10	8

4. Вы заняли на 4 года дол. 6 000 под **g** процентов. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток. Определить величину годового платежа. Составить план погашения.

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
g, %	15	17	23	19	16

5. Для следующего инвестиционного проекта:

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
***K*, ден. ед.**	100	200	300	400	500
R1, ден. ед.	20	100	–	–	110
R2, ден. ед.	100	160	250	200	600
R3, ден. ед.			–	–	
R4, ден. ед.			300	350	

рассчитать чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20% годовых. Сделать вывод о целесообразности инвестиций.

Указание. Для контрольной работы предлагается четыре задания, в каждом задании приводятся пять задач с параметрами, числовые значения параметров по пяти вариантам в каждом задании указаны в таблице. Нужно выполнить один вариант из предложенного задания.

Замечание. В задачах даны годовые процентные ставки.

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Активная операция – операция по размещению средств, в частности, вложение денег в ценные бумаги (в учебном пособии термин «актив» означает «ценная бумага», хотя в бухгалтерском учете этот термин значительно шире).

Акционерное общество – коммерческая организация, уставный капитал которой разделен на определенное число акций, удостоверяющих обязательственные права участников общества (акционеров) по отношению к обществу.

Акция – именная ценная бумага, закрепляющая право ее владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества (АО) в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом (если это обыкновенная акция) и на часть имущества, остающегося после ликвидации АО. Такой вид ценных бумаг наиболее распространен. По сути акция является свидетельством о внесении доли в акционерный капитал корпорации и представляет собой долю в собственности.

Акции подразделяются на привилегированные и обыкновенные. По своим характеристикам привилегированные акции во многом сходны с долговыми инструментами. Как правило, владельцы привилегированных акций имеют право на получение фиксированных дивидендов (аналогично процентам по облигациям) до того, как будут выплачены какие-либо дивиденды держателям обыкновенных акций. Регулярная выплата дивидендов по привилегированным акциям не является контрактным обязательством эмитента и производится по решению Совета директоров корпорации. Ситуация, когда дивиденды по привилегированным акциям не выплачиваются вовсе, бывает очень редко. Поэтому в определенной степени дивиденды по привилегированным акциям можно рассматривать как процентные платежи. Вместе с тем, в отличие от долговых ценных бумаг, привилегированные акции не имеют фиксированного срока. В случае банкротства корпорации держатели привилегированных акций имеют преимущество перед владельцами обыкновенных акций в оплате своих требований, однако уступают в очередности держателям долговых обязательств. Акционеры избирают директоров корпорации и тем самым контролируют в конечном счете распределение чистых прибылей корпорации, направляя всю чистую прибыль или ее часть на выплату дивидендов, либо соглашаясь с реинвестированием в расширение предприятия.

Вексель – документ, содержащий безусловное обязательство векселедателя выплатить векселедержателю определенную сумму денег к определенному моменту (обычно вексель выдается в качестве оплаты за поставленный товар).

Деньги – товар особого рода, являющийся всеобщим эквивалентом.

Депозитный сертификат – свидетельство банка о приеме денежных средств вкладчика, представляющее собой двустороннее обязательство: вкладчика – не изымать деньги некоторое время – и банка – уплатить через этот срок достаточно высокий процент по вкладу.

Диверсификация – распределение, рассредоточение вложений капитала.

Дивиденд – доход, который может получить акционер за счет части чистой прибыли текущего года акционерного общества, которая распределяется между держателями акций в виде определенной доли их номинальной цены. Дивиденды могут выплачиваться деньгами или, по усмотрению общества, другим имуществом (как правило, акциями дочерних предприятий или собственными акциями). Если дивиденд выплачивается собственными акциями, говорят о «капитализации дохода».

Доходность финансового актива – годовая процентная ставка, отражающая отдачу на капитал, вложенный в данный актив. В самом общем виде рассчитывается отношением годового дохода, генерируемого данным активом, к величине исходных инвестиций в него (начальной цене, по которой актив может быть куплен). Общая доходность равна сумме текущей (дивидендной, процентной) доходности и капитализированной доходности. Последняя возникает в результате изменения (роста) цены актива и находится отношением изменения цены к цене приобретения (начальной цене) актива. Текущая доходность равна отношению годового дохода (дивидендного или процентного) к цене приобретения (начальной цене) актива.

Доходность (обещанная, внутренняя) – ставка, при которой дисконтированные средства, вложенные в финансовый актив, полностью возвращаются владельцу.

Дробление акций – это процедура обмена (конвертации) одной акции на две или большее число акций той же категории с учетом кратного снижения номинальной цены новой акции. Процедура, обратная дроблению, называется консолидацией.

Инвестиции (экон.) – представленные в стоимостной оценке расходы, сделанные в ожидании будущих доходов. Инвестиции подразделяются на два вида – финансовые и реальные. Финансовые инвестиции представляют собой вложение капитала в долгосрочные финансовые активы – паи, акции, облигации. Вложением средств в набор финансовых активов осуществляется портфельное инвестирование. Реальные инвестиции – вложения капитала в развитие материально-технической базы предприятия, производственной и непроизводственной сфер.

Инвестиция (юрид.) – это денежные средства, ценные бумаги, иное имущество, в том числе имущественные права, иные права, имеющие денежную оценку, вкладываемые в объекты предпринимательской и (или) иной деятельности в целях получения прибыли и (или) достижения иного полезного эффекта.

Инвестиционная деятельность (юрид.) – вложение инвестиций и осуществление практических действий в целях получения прибыли и (или) достижение иного полезного эффекта.

Инвестиционный проект – план или программа мероприятий, связанных с осуществлением капиталовложений с целью их последующего возмещения и получения прибыли.

Инвестиционный процесс – поток платежей, в котором инвестиции (капиталовложения) отрицательны, а доходы положительны.

Инвестор – лицо, вкладывающее на долгосрочной основе в некоторый проект собственные средства, ожидая их возврата с прибылью.

Капитализация компании определяется как произведение текущей рыночной цены всех размещенных акций на их число.

Капитальные финансовые активы являются инструментами формирования капитала фирмы, одновременно и объектами, и способами как мобилизации (путем эмиссии), так и инвестирования средств. К таковым относятся акции и облигации.

Конъюнктура – текущее соотношение спроса и предложения на рынке.

Котировка ценных бумаг – определение курса их покупки и продажи на определенный момент времени, т. е. определение наивысшей цены, предлагаемой за ценную бумагу покупателем и наименьшей цены, по которой продавец готов ее уступить.

Купонная ставка – ставка дохода по облигации, выраженная в фиксированном проценте к ее номинальной стоимости.

Курс ценной бумаги – ее рыночная цена.

Ликвидность – способность предприятия в полной мере и в установленный срок выполнить свои обязательства.

Лица, принимающие решение – руководители, инвесторы, кредиторы и прочие юридические и физические лица, способные влиять на финансовое состояние предприятия и заинтересованные в этом.

Номинал акции – это то, что указано на ее лицевой стороне, поэтому иногда именуется нарицательной (лицевой) стоимостью. Из суммы всех номиналов акций, находящихся в обращении, складывается уставный капитал акционерного общества.

Облигация – одностороннее обязательство эмитента вернуть через определенный срок номинальную стоимость плюс проценты, это форма займа, не предполагающая движения товара, к которой приходится прибе гать государству, органам местной власти и предприятиям при наличии временных финансовых трудностей.

Оборот – общее количество акций определенного вида, на которые заключены кассовые сделки купли-продажи в течение одной биржевой сессии.

Объем – общая стоимость заключенных кассовых сделок купли-продажи по одной акции в денежном выражении во время данной биржевой сессии.

Опцион (англ. option – выбор) – ценная бумага, оформленная в виде контракта, дающая владельцу право (но не обязательство) купить, если это опцион «колл» (англ. call – затребовать), или продать, если это опцион – «пут» (англ. put – выложить), определенное количество акций по определенной цене в течение определенного времени или на определенную дату. Опционный контракт имеет две стороны – продавец (выписыватель) и покупатель (подписчик) опциона. Покупатель опциона имеет право купить или продать определенное количество акций по определенной цене, и за это право он платит продавцу определенную премию (цену опциона). Продавец опциона несет перед покупателем соответствующее обязательство: например, если покупатель воспользуется опционом – «пут», то продавец опциона обязан купить у него указанное количество акций по указанной в опционе цене.

Портфель (инвестиционный, рыночный) – набор различных ценных бумаг одного владельца, которые выбраны на основе учета целей данного инвестора и результатов анализа.

Рынок – сфера купли-продажи товаров.

Рынок финансовый состоит из трех частей – рынка ценных бумаг, рынка банковских ссуд и валютного рынка. Рынок ценных бумаг часто называют также фондовым рынком.

Риск – возможность экономических потерь, возникающих при наступлении неблагоприятных событий, часто случайных. Для управления рисками можно пользоваться надстройкой @RISK for Microsoft Excel.

Средняя цена акции по итогам торгового периода – отношение объема торговли к обороту за этот период.

Ставка дисконтирования (Диско́нтная ставка, англ. *Discount Rate*) – процентная ставка, используемая для оценки текущей стоимости финансового потока, используемая для расчета дисконтированной стоимости будущих денежных потоков; доходность альтернативных способов инвестирования с такой же степенью риска, процентная ставка по кредитам, взимаемая Федеральной резервной системой при предоставлении кредита банку – члену этой системы.

Стоимость под риском – Value at Risk (VaR) – стоимостная мера риска, абсолютный максимальный размер потерь, которые можно ожидать при владении финансовым инструментом (или их портфелем) на протяжении некоторого фиксированного периода времени (временно́го горизонта) в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности.

Текущая доходность облигации – отношение годового купонного дохода к цене покупки облигации.

Технический анализ является способом анализа тенденций изменения цен и объемов торговли ценными бумагами в прошлом для предвидения изменения цен в будущем. Технический анализ главным образом применяется для анализа цен на рынке ценных бумаг – фондовом рынке. Однако точно так же он может применяться для анализа валютного рынка и рынка ссудных капиталов. В последнем случае аналогом цен акций будут курсы валют или динамика процентов за использование денег.

Товарный варрант (англ. warrant – полномочие, правомочие) – свидетельство, выдаваемое товарными складами, о приеме товара на хранение, этот документ дает владельцу право получить заем под залог указанного товара.

Трейдер – участник рынка ценных бумаг, осуществляющий их покупку и продажу, в том числе брокер, дилер, инвестор, доверительный управляющий ценными бумагами (англ. trade – торговля).

Трейдинг – проведение сделок купли и продажи с ценными бумагами.

Тренд – направление развития цен в виде линии.

Уравнение эквивалентности составляется для любого момента времени путем суммирования (положительных и отрицательных) сумм, дисконтированных или наращенных к этому моменту по эффективной ставке, и приравнивания этой величины к нулю.

Учет векселей представляет собой оплату банком собственного векселя до наступления срока платежа, т. е. векселедержатель передает (продает) вексель банку по индоссаменту до наступления срока платежа и получает за это вексельную сумму за вычетом определенного процента от этой суммы. Каждый банк, учитывая векселя, устанавливает размер дисконта избирательно в зависимости от векселедержателя, предъявившего вексель к учету.

Финансовые активы, согласно международным стандартам финансовой отчетности (МСФО), включают денежные средства, договорное право требования денежных средств или других финансовых активов (например дебиторская задолженность), прочие долговые обязательства перед субъектом (например купленные облигации), договорное право на обмен финансовых инструментов (например, опцион), долевой инструмент (например, акции).

Финансовый анализ – изучение основных параметров, коэффициентов и мультипликаторов, дающих объективную оценку финансового состояния предприятия, а также анализ курса акций предприятия с целью принятия решения о размещении капитала. Финансовый анализ – это часть экономического анализа.

Основные направления финансового анализа:

- •анализ коэффициентов финансовой отчетности;
- •анализ денежных потоков с учетом дисконтирования;
- •эконометрическое моделирование финансовых взаимосвязей;
- •оптимизационные модели.

Фондовая биржа – организатор торговли на рынке ценных бумаг, причем участниками торгов на фондовой бирже являются только брокеры, дилеры и управляющие.

Фундаментальный анализ рынка ценных бумаг (ФуА) представляет собой метод классификации компаний на основе экономических факторов. Важнейшей его целью является определение реальной стоимости акций. Если реальная стоимость акций компании оказывается ниже их текущей рыночной цены, то компания считается переоцененной, в противном случае – недооцененной. Для оценки реальной стоимости акций используются данные о финансовом состоянии компании, перспективах развития бизнеса и внешние факторы – влияние конкурентов, контрагентов и государства.

Цена – денежное выражение стоимости. С точки зрения фундаментального анализа цена отличается от стоимости актива: «цена – это то, что платят, а стоимость – это то, что получают».

Ценные бумаги – это особым образом оформленные документы или записи в системе ведения реестра ценных бумаг (при бездокументарной форме), свидетельствующие о правах их владельца на определенное имущество или денежную сумму.

Чарт – графическое представление динамики рыночных цен на фондовой бирже.

Чистый приведенный доход от инвестиций в акции равен разнице между внутренней стоимостью $P_{вн}$ и текущей рыночной ценой акции P: $\text{NPV} = P_{вн} - P$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Модель частичной корректировки дивидендов

В моделях частичной корректировки предполагается, что поведенческое уравнение описывает не фактическое значение зависимой переменной y, а ее желаемое (целевое) значение:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2). \qquad (1)$$

Предполагается также, что фактическое значение зависимой переменной не выходит мгновенно за желаемый уровень, а изменяется только на долю λ в нужном направлении:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda\left(y_t^* - y_{t-1}\right), \quad 0 \le \lambda \le 1. \qquad (2)$$

Перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$y_t = \lambda y_t^* + (1-\lambda)\, y_{t-1}. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что y_t получается как взвешенное среднее (выпуклая комбинация) желаемого уровня и фактического значения этой переменной в предыдущем периоде с параметром λ.

Параметр λ называется *корректирующим коэффициентом*. Чем больше λ, тем быстрее происходит процесс корректировки. Если $\lambda = 1$, то $y_t = y_t^*$ и полная корректировка происходит за 1 период. Если $\lambda = 0$, то корректировка y_t не происходит совсем.

Подставляя правую часть формулы (1) в формулу (3), получаем

$$y_t = \alpha\lambda + \beta\lambda x_t + (1-\alpha)\, y_{t-1} + \lambda\varepsilon_t. \qquad (4)$$

Применяем метод наименьших квадратов к оценке составных параметров уравнения.

Пример. Производственные компании распределяют прибыль $П$, оставшуюся после уплаты налогов: одну часть на выплату дивидендов D, другую – на финансирование инвестиций. Известны данные о деятельности производственных компаний за ряд предыдущих лет (усл. ед.):

T	D	П	t	D	П
1	100	400	6	800	1100
2	300	600	7	900	1300
3	450	700	8	1000	1400
4	550	800	9	1100	1500
5	700	1000	10	1200	1700

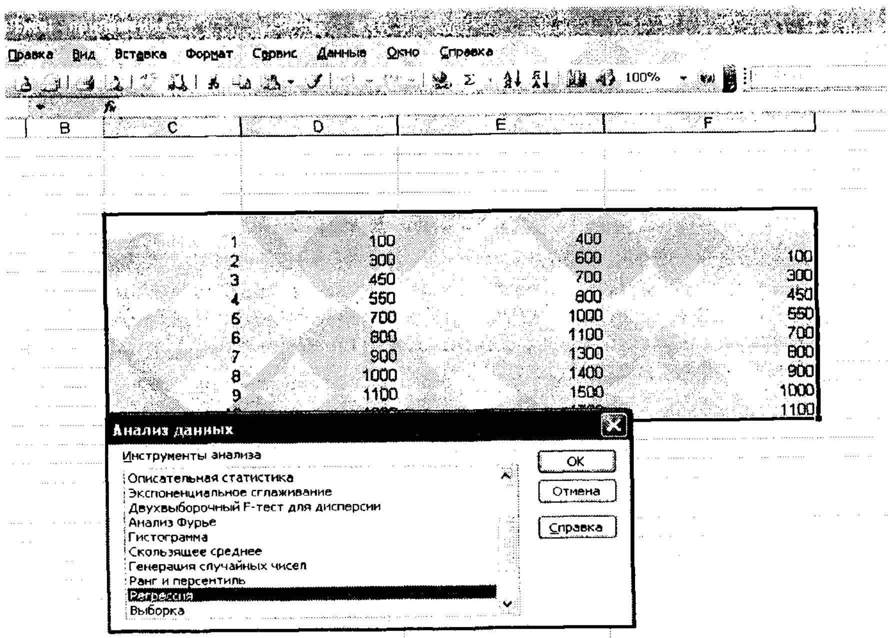
Предположим, что у фирмы имеется целевая долгосрочная доля выплат γ и желаемый объем дивидендов D_t^* соотносится с текущей прибылью $П_t$ как $D_t^* = \alpha + \gamma П_t + \varepsilon_t$. Однако реальный объем дивидендов подвержен частичной корректировке:

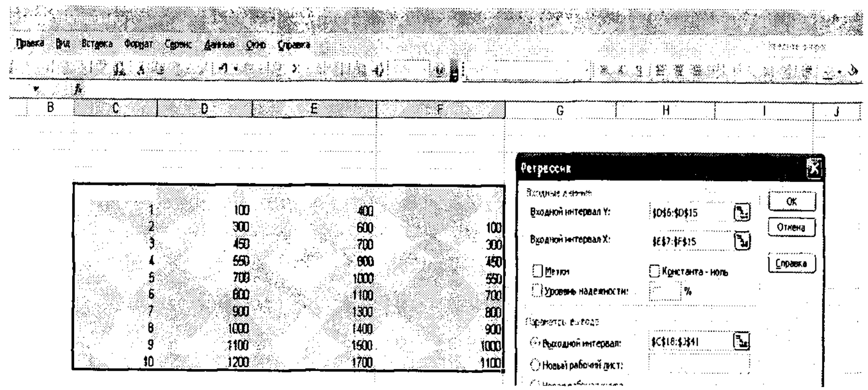
$$D_t - D_{t-1} = \lambda(D_t^* - D_{t-1}), \text{ или } D_t = \alpha\lambda + \gamma\lambda П_t + (1-\lambda)D_{t-1} + \lambda\varepsilon_t, \; 0 \le \lambda \le 1.$$

На основе данных о деятельности производственной компании за ряд лет построим уравнение регрессии. Воспользуемся программой «Регрессия» MSExcel. Вводим исходные и вспомогательные данные с временным сдвигом на 1 год.

t	D	$П$	D_{t-1}
1	100	400	
2	300	600	100
3	450	700	300
4	550	800	450
5	700	1000	550
6	800	1100	700
7	900	1300	800
8	1000	1400	900
9	1100	1500	1000
10	1200	1700	1100

Затем применяем программу «Регрессия».





Получаем результат:

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,999366914
R-квадрат	0,998734229
Нормированный R-квадрат	0,998312306
Стандартная ошибка	12,49915686
Наблюдения	9

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	2	739618,182	369809,091	2367,0975	2,02799E-09
Остаток	6	937,373533	156,2289222		
Итого	8	740555,5556			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересечение	67.82679077	28,94958901	2,342927588	0,057612817
Переменная X 1	0.292796439	0,0710529	4,120823222	0,006210511
Переменная X 2	0.58174828	0,081088826	7,174210128	0,000370492

Используя найденные коэффициенты, строим уравнение регрессии: $D_t = 68 + 0{,}29П_t + 0{,}58D_{t-1}$. Из соотношения $1 - \lambda = 0{,}58$ определяется корректирующий коэффициент $1 - \lambda = 0{,}42$, а из соотношения $\gamma\lambda = 0{,}29$ – оценка доли выплат $\gamma = 0{,}69$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Выгодчикова И.Ю.* Процентный анализ финансовых потоков. Саратов: Изд-во СГУ, 2008.
2. *Выгодчикова И.Ю.* Оценка доходности финансовых активов. Саратов: Изд-во СГУ, 2009.
3. *Дудов С.И.* Оптимальное портфельное инвестирование. Саратов, 2008.
4. Финансовая математика: математическое моделирование финансовых операций: учеб. пособие / под ред. В.А. Половникова, А.И. Пилипенко. М.: Вузовский учебник, 2007.
5. *Капитоненко В.В.* Задачи и тесты по финансовой математике. М.: Финансы и статистика, 2007.
6. *П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов.* Финансовая математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Дополнительная литература

7. *Четыркин Е.М.* Финансовые риски. М.: «ДЕЛО», 2008.
8. *Шарп У.Ф., Александер Г.Д., Бейли Д.Б.* Инвестиции. М.: Инфра-М, 2007.
9. *Sharpe W.F., Alexander G.J.* Investments, 4-Th ed. Prentice-Hall International, Inc., 1990.
10. *Колесов Е.В.* Математические методы финансового анализа: учебное пособие. Кострома: Изд-во Костром. ун-та, 2007.
11. *Малыхин В.И.* Финансовая математика. М., 2000.
12. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. М.: Дело, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ