УДК 519.4

С. И. Небалуев, В. В. Кривобок

О ДЕЙСТВИЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В теории толерантных пространств, начиная с работ ее родоначальника Зимана (см. [1]), активно применяются методы алгебраической топологии (см. [2]). В алгебраической топологии и ее приложениях одним из важнейших инструментов являются действия фундаментальных групп топологических пространств на различные множества, группы и т. п. (см. [3]). В случае толерантных пространств подобные действия фундаментальных групп этих пространств также имеют место. Начнем с расслоенных толерантных пространств (см. [4]) и толерантных накрытий (см. [5]).

Определение 1. *Расслоенным толерантным пространством называется набор*

$$\xi = ((E,\overline{\tau}),\ (B,\tau),\ (F,\vartheta),\ p),$$

в котором $(E,\overline{\tau})$, (B,τ), (F,ϑ) *– толерантные пространства, называемые пространтвом расслоения, базой расслоения и общим слоем соответственно, а* $p:\ (E,\overline{\tau}) \to (B,\tau)$ *– толерантное отображение, называемое проекцией. При этом для каждой точки* $x \in B$ *и соответсвующей толерантной звезды* $\overline{x} = \tau < x >= \{x' \in B | x'\tau x\}$ *имеется толерантный гомеоморфизм*

$$\varphi_{\overline{x}}:\ \tau < x > \times F \to p^{-1}(\tau < x >),$$

удовлетворяющий условию $p \circ \varphi_{\overline{x}} = pr_1$, *где* pr_1 *– проекция на первый сомножитель прямого произведения.*

Определение 2. *Пусть* $\xi = (E,B,F,p)$ *– расслоенное толерантное пространство и* G *– некоторая группа толерантных гомеоморфизмов слоя* (F,ϑ) *на себя. Группа* G *называется структурной группой расслоенного толерантного пространства* ξ, *если для каждого слоя*

$p^{-1}(x)$ имеется совокупность $\Phi(x) = \{\varphi\}$ толерантных гомеоморфизмов $\varphi:\ F \to p^{-1}(x)$, на которую транзитивно действует справа группа G по формуле

$$(\forall g \in G)\ (\forall \varphi \in \Phi(x))\ \varphi \cdot g = \varphi \circ g \in \Phi(x);$$

при этом должно выполнятся условие

$$x_2 \in \tau < x_1 > \Longrightarrow \varphi_{\overline{x_1}}|(\{x_2\} \times F) \in \Phi(x_2).$$

Определение 3. *Толерантное отображение $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \to (X, \tau)$ называется толерантным накрытием, если для любой точки $x \in X$ выполняются следующие условия:*

1. $p^{-1}(\tau < x >) = \bigcup\limits_{y \in p^{-1}(x)} \overline{\tau} < y >;$

2. *если $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ и $y_1 \neq y_2$, то $\overline{\tau} < y_1 > \cap \overline{\tau} < y_2 >= \emptyset$;*

3. $(\forall y \in p^{-1}(x))$ $p : \overline{\tau} < y > \to \tau < x >$ *– толерантный гомеоморфизм.*

Определение 4. *Толерантным расслоением (в смысле Гуревича) называется толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ такое, что любая толерантная гомотопия в базе расслоения (B, τ) поднимается по начальным условиям в пространтво расслоения $(E, \overline{\tau})$.*

Теорема 1. *Пусть $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \to (X, \tau)$ – толерантное накрытие с линейно связными (X, τ) и $(\overline{X}, \overline{\tau})$, тогда фундаментальная группа $\pi(X)$ базы накрытия действует на накрывающем пространстве $(\overline{X}, \overline{\tau})$ в каждом слое $p^{-1}(x)$, и это действие в каждом слое транзитивно. Если же толерантное пространство $(\overline{X}, \overline{\tau})$ односвязно, то есть имеет тривиальную фундаментальную группу, то действие $\pi(X)$ на $(\overline{X}, \overline{\tau})$ является свободным.*

Теорема 2. *Пусть $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \to (X, \tau)$ – толерантное накрытие с линейно связными пространствами (X, τ) и $(\overline{X}, \overline{\tau})$ и пусть $x_0 \in X$ – произвольная точка базы, тогда система $\xi = (\overline{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ является расслоенным толерантным пространством, допускающим в качестве структурной группы фундаментальную группу $\pi(X, x_0)$.*

Теорема 3. *Если $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ – толерантное расслоение (в смысле Гуревича), в котором база (B, τ) и слой $(F = p^{-1}(b_0), \overline{\tau})$ являются линейно связными, то фундаментальная группа $\pi(B, b_0)$ базы (B, τ) действует на группах гомологий $H(F) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} H_n(F)$ слоя $(F, \overline{\tau})$.*

Замечание. Так как толерантные накрытия, как и любые проекции в расслоенных толерантных пространствах, являются толерантными расслоениями (в смысле Гуревича) (см. [5] и [4]), то условия в теоремах 1 и 3 различаются тем, что для толерантного накрытия p слой $p^{-1}(x_0) \subset \overline{X}$ над точкой $x_0 \in X$дискретен и не является линейно связным. Тем не менее, действие $\pi(X, x_0)$ на множестве $p^{-1}(x_0)$ индуцирует действие $\pi(X, x_0)$ на нулевой группе гомологий $H_0(p^{-1}(x_0))$, так как точки из $p^{-1}(x_0)$ свободно пораждают эту группу гомологий. И, поскольку, $H_n(p^{-1}(x_0)) = 0$, для $n > 0$, то можно считать, что определено действие группы $\pi(X, x_0)$ на группах гомологий $H(p^{-1}(x_0)) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} H_n(p^{-1}(x_0))$ как и в теореме 3.

Фундаментальная группа $\pi(X, x_0)$ толерантного пространства (X, τ) является частным случаем высших гомотопических групп $\pi_n(X, x_0)$ при $n = 1$ (подробности в [6]). Имеет место следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть (X, τ) – линейно связное толерантное пространство, тогда система толерантных гомотопических групп*

$$\{\pi_n(X, x_0) | x_0 \in X\}$$

является локальной системой групп (см. [3]) толерантного пространства (X, τ) для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, что в частности, означает, что фундаментальная группа $\pi(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ действует на группах $\pi_n(X, x_0)$.

Заметим, что группа $\pi(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ действует на себя внутренними автоморфизмами сопряжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zeeman E. S.* The topology of brain and visual perception. The topology of 3-Manifolds, M.K. Ford (ed). 1962.

2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий. М : Мир, 1964.

4. *Небалуев С. И.* Расслоенные толерантные пространства// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 3. С. 79–93.

5. *Небалуев С. И.* Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия// Чебышевский сборник. Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5. Вып. 1. С. 144–152.

6. *Небалуев С. И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 2. С. 15–30.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ