УДК 517.518.84

А. О. Залетаева, В. В. Кривобок

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

В данной работе рассматривается алгоритм реализации аппроксимаций Паде в оболочке Mathlab, не приводящий к возникновению так называемых дуплетов Фруассара.

Аппроксимации Паде являются локально наилучшими рациональными приближениями заданных степенных рядов. Данный вид аппроксимаций находит широкое применение в научно-технических расчетах. В пакете программ Mathlab имеется стандартная функция, вычисляющая аппроксимации Паде, но она не учитывает многомерности ядра матрицы, из которого находятся коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде.В результате чего числитель и знаменатель аппроксимации Паде могут иметь общие множители, сокращая которые получаем нужный ответ единственным образом. На практике данные множители являются зачастую, лишь примерно равными, что приводит к дуплетам Фруассара. Дуплетов Фруассара можно избежать, если находить знаменатель аппроксимации Паде без лишних нулей. Алгоритм, предложенный в статье посвящен именно этой процедуре.

Определение. *Аппроксимацией Паде типа* (m, n) *для ряда* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *называется рациональная функция* $\pi_{n,m} = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$ *такая что многочлены* $P_{n,m}(z)$ *и* $Q_{n,m}(z)$ *удовлетворяют условиям:*

1. $Q_{n,m}(z) \neq 0, \ \deg Q_{n,m}(z) \leqslant m,$
2. $\deg P_{n,m}(z) \leqslant n,$
3. $f(z)Q_{n,m}(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}),$ *при* $z \to 0.$

Если из коэффициентов знаменателя составить вектор, то он будет принадлежать ядру теплицевой матрицы:

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & c_n & \cdots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \cdots & c_{n-m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \cdots & c_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

В работе [1] показано, что множество всех знаменателей аппроксимации Паде допускает параметризацию $Q_{n,m}(z) = q(z)Q_1(z)$, где $q(z)$ – произвольный многочлен степени, не выше $n - \mu_1$ и μ_1, $Q_1(z)$ – так называемые первый существенный индекс и первый существенный многочлен последовательности $c_{n-m+1}, c_{n-m+2}, \ldots, c_{n+m}$. Таким образом, из всех многочленов $Q_{n,m}(z)$ первый существенный многочлен $Q_1(z)$ имеет минимальную степень. Предложенный в этой статье алгоритм нахождения аппроксимации Паде основан на выборе в качестве знаменателя аппроксимации многочлена $Q_1(z)$. Множество всех числителей аппроксимации Паде также допускает аналогичную параметризацию. Корнями многочлена $q(z)$ являются общие ненулевые корни числителя $P_{n,m}(z)$ и знаменателя $Q_1(z)$ аппроксимации Паде. На практике, из-за неточных исходных данных и ошибок вычислений, часто оказывается, что лишнему корню знаменателя (не полюсу аппроксимируемой функции) соответствует лишь примерно равный ему корень числителя. Такая пара корней носит название дуплетов Фруассара (Froissart doublets).

Опишем алгоритм для нахождения аппроксимаций Паде типа (n, m) функции $f(x)$ в точке $x = a$.

1. Находим коэффициенты $c_0, ..., c_{n+m}$ разложения в ряд Тейлора аппроксимируемой функции $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ в точке $x = a$.

2. Составим теплицевы матрицы (здесь $c_k = 0$, если $k < 0$)

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} & \ldots & c_M \\ c_{k+2} & c_k & \ldots & c_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N-1} & \ldots & c_{N+M-k} \end{pmatrix}$$

где $M = n - m + 1$, $N = n + m$, $M \leqslant N$. Ядра этих матриц образуют цепочку вложенных пространств. Первое нетривиальное ядро в этой цепочке обязательно является одномерным, а производящий многочлен его базиса является искомым знаменателем $Q_1(z)$.

3. Находим ранги r_k матриц T_k, $M \leqslant k \leqslant N$. Функция $rank(A)$ в Matlab возвращает ранг матрицы A, который определяется как количество ее сингулярных чисел, превышающих порог tol.

4. Находим размерности $d_k = k - M + 1 - r_k$, $M \leqslant k \leqslant N$ правых ядер матриц T_k . Положим также $d_{M?1} = 0$, $d_{N+1} = N - M + 2$.

5. Составляем разности $\Delta_k = d_k - d_{k-1}$, $M \leqslant k \leqslant N + 1$ и находим существенные индексы μ_1 , μ_2. Для чисел Δ_k, как следует из работы [1],

справедливы равенства: $\Delta_M = \ldots = \Delta_{\mu_1} = 0$, $\Delta_{\mu_1+1} = \ldots = \Delta_{\mu_2} = 1$, $\Delta_{\mu_2+1} = \ldots = \Delta_{N+1} = 2$. Числа μ_1, μ_2 определяемые этими соотношениями, и называются первым и вторым существенным индексами последовательности $c_M, \ldots, c_N$. Заметим, что последовательность Δ_k является монотонной. Нарушение монотонности этой последовательности указывает на то, что индексы найдены неверно.

6. Находим вектор $(g_0, g_1, \ldots, g_{\mu_1+1-M})^T$ из одномерного ядра матрицы T_{μ_1+1-M} . Он содержит коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде, имеющего минимальную степень.

7. Находим знаменатель аппроксимации Паде $Q_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\mu_1+1-M} g_k(z - a)^k$

Степень многочлена $Q_1(z)$ может быть формальной. Если $\deg Q_1(z) = s < \mu_1 + 1 - M$, то обычно считают, что $z = \infty$ является корнем $Q_1(z)$ кратности $\mu_1 + 1 - M - s$. Из-за приближенных вычислений коэффициенты g_k, $k = s + 1, \ldots, \mu_1 + 1 - M$ могут оказаться лишь близкими к нулю. Это приведет к тому, что многочлен $Q_1(z)$ будет иметь k корней с большой абсолютной величиной.

Известный априорный дополнительный параметр tolerance, задаваемый пользователем используется программой для того, чтобы определить какие из коэффициентов g_k следует считать равными нулю.

8. Составляем матрицу $M = ||c_{i-j}||$ $i = 1, \ldots, n+1$, $j = 1, \ldots, s+1$, ($c_k = 0$, если $k < 0$), необходимую для нахождения числителя аппроксимации Паде. Здесь s – степень многочлена $Q_1(z)$. После исключения почти нулевых коэффициентов в многочлене $Q_1(z)$ его степень s может оказаться меньше формальной степени $\mu_1 + 1 - M$.

9. Находим вектор $(p_0, p_1, \ldots, p_n)^T = M \cdot (q_0, q_1, \ldots, q_s)^T$ и числитель аппроксимации Паде $P_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k(z - a)^k$. На этом этапе также целесообразно убрать нулевые (меньшие, чем tolerance) элементы p_k перед образованием числителя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Adukov V.M.* The problem of Pade approximation as the Riemann boundary problem [Zadacha approksimatsii Pade kak kraevaya zadacha Rimana]. Vestsi NAN Belarusi. Seriya Fiziko-matem. nauk [Proceedings of NAS of Belarus. Series of physical and mathematical sciences], 2004, no. 4, pp. 55 – 61.