УДК 513.6

Е. В. Коробченко, В. В. Кривобок, С. И. Небалуев

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЛЕРАНТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Спектральные последовательности являются современным эффективным вычислительным инструментом, используемым в разных областях математики. Статья продолжает серию работ, посвященных построению спектральных последовательностей различных типов толерантных расслоений. В этих работах типичным условием, накладываемым на толерантные расслоения, было требование линейной связности слоя расслоения. Поэтому за пределами этих построений оказывался важный случай толерантных расслоений — толерантные накрытия, так как у всех толерантных накрытий дискретные слои. Основным результатом статьи является построение спектральной последовательности для толерантных накрытий.

Спектральные последовательности (см. [1]) зарекомендовали себя как один из самых сложных, но и самых эффективных методов вычислений в различных разделах математики, например, таких как алгебраическая топология, алгебраическая геометрия и др. В алгебраической топологии спектральные последовательности часто появляются в связи с изучением расслоений топологических пространств. В качестве самого известного примера можно привести спектральную последовательность Лере-Серра топологического расслоения. Методы алгебраической топологии в значительной степени переносятся в теорию толерантных пространств (см. [2]). И хотя при этом эти методы преобретают специфические черты, тем не менее многие результаты в обеих теориях оказываются схожими.

Отсылая к работе [3], приведем определение.

Определение 1. *Толерантное отображение* $p : (E, \bar\tau) \to (B, \tau)$ *называется толерантным расслоением (в смысле Гуревича), если для любого толерантного пространства* (Y, ϑ) *и любых толерантных отображений* $F : (Y \times I_n, \vartheta \times \iota_n) \longrightarrow (B, \tau)$, $\bar f : (Y, \vartheta) \longrightarrow (E, \bar\tau)$ *таких, что* $F|(Y \times \{0\}) = p \circ \bar f$, *существует толерантное отображение* $\bar F : (Y \times I_n, \vartheta \times \iota_n) \longrightarrow (E, \bar\tau)$ *такое, что* $\bar F|(Y \times \{0\}) = \bar f$, $p \circ \bar F = F$.

В этом определении (I_n, ι_n) — толерантный отрезок длины n, в котором $I_n = \{\frac{k}{n} | k = \overline{0, n}\}$, $\frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k - l| \leqslant 1$.

Для толератного расслоения $p: \ (E, \bar{\tau}) \to (B, \tau)$ толерантное пространство $(E, \bar{\tau})$ называется пространством расслоения, пространство (B, τ) называется базой расслоения, а пространство $(F, \bar{\tau})$, где $F = p^{-1}(b_0) \subset E$, $b_0 \in B$ называется слоем расслоения над точкой b_0.

Теорема 1. (Спектральная последовательность Лере-Серра для толерантных расслоений). *Пусть $p: \ (E, \bar{\tau}) \to (B, \tau)$ — толерантное расслоение с линейно связными базой (B, τ) и слоем $(F, \bar{\tau})$, тогда имеется спектральная последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon^m = \bigoplus\limits_{s,t} \varepsilon^m_{s,t}\}_m$, эта последовательность сходится и ее первые члены имеют вид*

$$\varepsilon^1_{s,t} \cong C^\bullet_s(B) \otimes H_t(F), \tag{1}$$

$$\varepsilon^2_{s,t} \cong H_s(B; H_t(F)). \tag{2}$$

Замечание 1. В формуле (1) $C^\bullet_s(B)$ обозначает группу s-мерных нормализованных пунктированных толерантных сингулярных цепей пространства (B, τ) (см. [4]).

Замечание 2. В правой части формулы (2) $H(B; H(F))$ представляют собой гомологии базы (B, τ) с локальными коэффициентами в группе гомологий слоя $(F, \bar{\tau})$. При этом локальная система коэффициентов определяется с помощью действия фундаментальной группы $\pi(B, b_0)$ на группе гомологий $H(F)$, описанного в работе [5].

Замечание 3. Доказательство теоремы 1 оказалось весьма громоздким (см. [6]), но его можно упростить с помощью процедуры окаймления толерантных сингулярных кубов (см. [7–8]).

В топологии особую роль играют расслоения, чье расслоенное пространство является пространством непрерывных путей. В случае толерантных пространств пространство $(P(X, x_0), \varkappa)$ (см. [9]) определяет лишь квазирасслоение.

Теорема 2. *Толерантное отображение $p: \ (P(X, x_0), \varkappa) \to (X, \tau)$, определеяемое формулой $(\forall \omega_M \in P(X, x_0))\ p(\omega_M) = \omega_M$, является толерантным квазирасслоением в том смысле, что для любого пространства (Y, ϑ) и любых толерантных отображений $F: (Y \times I_M, \vartheta \times \iota_M) \longrightarrow (X, \tau)$, $\bar{f}: (Y, \vartheta) \longrightarrow (P(X, x_0), \varkappa)$, $F|(Y \times \{0\}) = p \circ \bar{f}$, существует толерантное отображение $\bar{F}: (Y \times I_M, \vartheta \times \iota_M) \longrightarrow (P(X, x_0), \varkappa)$ такое,* *что*

$$p \circ \bar{F} = F,\ (\forall y \in Y)\bar{F}(y,0) = \bar{f}(y) * (\varepsilon_{p\circ\bar{f}(y)})_M = \bar{f}(y) * (\varepsilon_{F(y,0)})_M,$$

где $(\varepsilon_{F(y,0)})_M$ *— постоянный путь длины* M *в точке* $F(y,0)$*, а символ* $*$ *означает операцию склейки путей (см. [2]). При этом квазирасслоение* p *имеет слой* $p^{-1}(x_0) = (\Omega(X,x_0),\varkappa)$ *— пространств толерантных петель в пространстве* (X,τ)*.*

Несмотря на отсутствие полного набора свойств из определения 1, для построенного квазирасслоения имеется спектральная последовательность типа Лере-Серра.

Теорема 3. *В обозначениях предыдущей теоремы для линейно связного и односвязного толерантного пространства* (X,τ) *имеется сходящаяся спектральная последовательность* $\varepsilon = \{\varepsilon^m = \bigoplus\limits_{s,t}\varepsilon^m_{s,t}\}_m$*, чьи первые члены имеют вид*

$$\varepsilon^1_{s,t} \cong C^\bullet_s \otimes H_t(\Omega(X,x_0)),$$

$$\varepsilon^2_{s,t} \cong H_s(X; H_t(\Omega(X,x_0))).$$

Замечание 1. Односвязность пространства (X,τ) означает тривиальность фундаментальной группы $\pi(X,x_0)$, что эквивалентно линейной связности пространства $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$, являющегося слоем квазирасслоения (ср. с условиями теоремы 1). Тривиальность группы $\pi(X,x_0)$ означает также, что в последней формуле $H_t(\Omega(X,x_0))$ — обычная группа коэффициентов.

Важным частным случаем толерантных расслоений являются толерантные накрытия (см. [3]). Но так как слои толерантных накрытий дискретны и поэтому не являются линейно связными, а как видно из теорем 1 и 3, это условие требуется для построения спектральной последовательности Лере-Серра, то для толерантных накрытий следует искать спектральные последовательности другого типа.

Теорема 4. *Пусть* $p : (\bar{X},\bar{\tau}) \to (X,\tau)$ *— толерантное накрытие с линейно связной базой* (X,τ)*, тогда существует спектральная последовательность* $\varepsilon = \{\varepsilon^m = \bigoplus\limits_{s,t}\varepsilon^m_{s,t}\}_m$*, сходящаяся к группе гомологий* $H(X)$ *такая, что*

$$\varepsilon^2_{s,t} \cong H_s(\pi(X,x_0); H_t(X)).$$

Доказательство этой теоремы основано на применении спектральной последовательности Картана-Лере и использует теорему 3 работы [10], а также теоремы 7 и 8 работы [11].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мак-Клири Дж.* Путеводитель по спектральным последовательностям. М. : МЦНМО, 2008.

2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Небалуев С. И.* Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия // Чебышевский сборник. Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5. Вып. 3. С. 144–152.

4. *Небалуев С. И., Кляева И. А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестник Самарского гос. ун-та. Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2007. Вып. 7(57). С. 134–151.

5. *Небалуев С. И., Кривобок В. В.* О действиях фундаментальных групп толерантных пространств // Математика. Механика : сб. научн. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 70–72.

6. *Небалуев С. И., Кляева И. А., Сусин М. Н.* Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 94–118.

7. *Коробченко Е. В.* Гомологические свойства конструкции окаймления толерантных сингулярных кубов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 26–36.

8. *Небалуев С. И., Коробченко Е. В., Сусин М. Н.* Пунктированные толерантные кубические сингулярные гомологии // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 79–89.

9. *Небалуев С. И., Сусин М. Н.* Точная гомотопическая последовательность квазирасслоения пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 62–78.

10. *Небалуев С. И.* Спектральная последовательность Картана-Лере для толерантных пространств // Математика. Механика : сб. научн. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 70–73.

11. *Небалуев С. И.* Накрывающие преобразования толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смеж-

ным вопросам : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 30–35.