где $\{n_j\}$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех чисел 2^i, к которым добавлены числа $2^{i^*}+2^{i^*-1}$, $\tilde{c}_k\tilde{w}_k(x_0)$ — члены ряда (1) после сделанной перестановки, и будет расходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_k\tilde{w}_k(x_0).$$

УДК 517.518

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ[1]

П. А. Терехин (Саратов, РФ)
TerekhinPA@info.sgu.ru

Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$ на единичном отрезке. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j).$$

Кроме того, пусть $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой функций* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ.

Предположим, что порождающая функция аффинной системы является тригонометрическим полиномом следующего специального вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k \sin(2\pi 2^k t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Теорема. *Для того, чтобы аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ была полной в пространстве $L^2(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы алгебраический многочлен*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$$

не обращался в нуль в замкнутом единичном круге $(|z| \leqslant 1)$.

Для рассматриваемых тригонометрических аффинных систем, при выполнении условия Теоремы, доказана их базисность по Риссу и получены прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике пространства $L^2(0,1)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00120) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин П. А.* О наилучшем приближении функций в метрике L^p полиномами по аффинной системе // Мат. сб. 2011. Т. 202(2). С. 131—158.

УДК 517.518.82

ПРОБЛЕМА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ЯВНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков (Москва, РФ)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0,1]$ вводятся по правилу

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Понятно, что $B_n(f,x)$ есть обычный полином переменной x степени $\leqslant n$. Возникает естественный вопрос: зная конкретную функцию $f \in C[0,1]$, получить явную алгебраическую запись вида

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(f)\, x^k, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Формула коэффициентов

$$a_{n,k}(f) = C_n^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, C_k^j\, f\left(\frac{k-j}{n}\right) \tag{3}$$

впервые появилась в работе Вигерта [1], заметившего, кстати, что сумма в (3) есть в точности конечная разность $\Delta_{1/n}^k f(0)$ порядка k с шагом $1/n$. Именно через конечные разности формулу Вигерта обычно подают в литературе (см. [2, с. 108–109]).

Несмотря на наличие универсальных выражений (3), итоговые значения коэффициентов $a_{n,k}(f)$ в конкретных примерах отнюдь не очевидны, и для установления соответствующей явной записи (2) приходится использовать дополнительные соображения комбинаторного и аналитического характера.

[1]При частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).