Теорема. *Пусть* $\phi \in L_1[0,1] \cap L_\infty[0,1]$ *и пусть* $k \geqslant \|\phi\|_\infty$. *Тогда выполнены неравенства*

$$E_{N,k} \leqslant \frac{\|\phi\|_1}{N} \quad \text{и} \quad E_{N,k,T} \leqslant \max_{i=1,\dots,N}\{\|\phi\|_{1,[x_{i-1},x_i]}\}.$$

Данная задача тесно связана с задачами оценки поперечников Колмогорова и поперечников Коновалова, рассмотренных в работах [1]–[3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 3. С. 369–380.

2. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 871–879.

3. *Васильева А. А.* Оценки поперечников весовых соболевских классов // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 7. С. 15–52.

УДК 517.51

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МЕТОДОВ, СОХРАНЯЮЩИХ K-ВЫПУКЛОСТЬ[1]

С. П. Сидоров (Саратов, РФ)

SidorovSP@info.sgu.ru

Пусть D^i означает оператор дифференцирования порядка i, $D^i f(x) = \frac{d^i f}{dx^i}$, и $D^0 = I$ есть тождественный оператор.

Обозначим $C^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, пространство всех действительнозначных k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0,1]$, с субнормой

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i!} \sup_{x \in [0,1]} |D^i f(x)|, \tag{1}$$

где производные являются правосторонними в точке 0 и левосторонними в точке 1. $B^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, будет означать пространство всех действительнозначных функций, определенных на $[0,1]$, имеющих ограниченную производную порядка k, с субнормой (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является k-выпуклой, $k \geqslant 1$, на $[0,1]$, если для произвольно выбранных $k+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_k$ из $[0,1]$, имеет место неравенство

$$[t_0, \ldots, t_k]f \geqslant 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_k]f$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$.

Класс всех k-выпуклых функций на $[0,1]$ обозначим $\Delta^k[0,1]$. Если $f \in C^k[0,1]$, тогда $f \in \Delta^k[0,1]$ в том и только том случае, когда $f^{(k)}(t) \geqslant 0$, $t \in [0,1]$. Положим $\Delta^0[0,1] := \{f \in C[0,1] : \ f(t) \geqslant 0, \ t \in [0,1]\}$. Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \ldots$, $\Pi_m := \mathrm{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$, $P_m := \{f \in \Pi_m : \ \|f\|_{B^m[0,1]} \leqslant 1\}$.

Напомним, что линейный оператор, отображающий $C[0,1]$ в линейное пространство конечной размерности n, называется *оператором конечного ранга n*.

Следующее утверждение рассматривает задачу оценки ошибки одновременного приближения функций из $\mathrm{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_{k+2}\}$ и их производных конечномерными линейными операторами, сохраняющими k-выпуклость.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant k+2$. Существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, что*

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \ \sup_{f \in P_{k+2}} \|f - L_n f\|_{B^k[0,1]} < c_2 n^{-2}, \qquad (1)$$

где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов $L_n : C^k[0,1] \to B^k[0,1]$ конечного ранга n, удовлетворяющих $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Вместе с тем $\inf_{L_n(\Delta^k)\subset\Delta^k} \ \sup_{f \in P_{k+1}} \ \|f - L_n f\|_{B^k[0,1]} = 0$. При $k = 0$ получаем результат [1].

Построен оптимальный линейный оператор $\Lambda_{k,n}$ для оценки в утверждении теоремы 1, который представляет собой оператор сплайн-интерполяции степени $k+1$ гладкости k. Оптимальность $\Lambda_{k,n}$ связана с тем фактом, что $\Lambda_{k,n}$ представляет собой минимальную формосохраняющую проекцию (the minimal shape-preserving projection, [2]) на интервале $[0, \frac{1}{n-1}]$, которая затем гладко продолжена на последующие интервалы.

Из полученных результатов следует, что если линейный оператор конечного ранга n сохраняет k-выпуклость, то порядок приближения производных порядка $0 \leqslant i \leqslant k$ непрерывных функций производными этого оператора не может быть лучше чем n^{-2} на некотором подмножестве span $\{e_0, e_1, \ldots, e_{k+2}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev R. K., Guendouz F.* On the order of approximation of continuous functions by positive linear operators of finite rank// J. Approx. Theory. 1992. Vol. 69 (2). P. 133–140.

2. *Lewicki G., Prophet M. P.* Minimal Shape-Preserving Projections Onto $\prod_n$: Generalizations and Extensions // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2006. Vol. 27. P. 847–873.

3. *Muñoz-Delgado F. J., Ram´ırez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation// J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

УДК 517.518.862

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ГЕРОНИМУСА ДЛЯ НОРМ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА МНОЖЕСТВЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

И. Е. Симонов (Екатеринбург, РФ)
isimonov@k66.ru

1. Пусть $\mathcal{T}_m$ есть множество тригонометрических полиномов

$$G(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta)) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{m} \overline{\gamma_k} e^{ik\theta}\right),$$

$$\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k,\ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

порядка m с вещественными коэффициентами, $\mathcal{C}_m$ есть подмножество четных полиномов из $\mathcal{T}_m$. На множестве $\mathcal{T}_m$ определим норму

$$\|G\|_1 = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta.$$

Каждому набору $c = (c_0, \ldots, c_m)$, $c_k = a_k + ib_k$, $b_0 = 0$, из $m+1$ комплексного числа сопоставим линейный функционал на множестве $\mathcal{T}_m$:

$$\Phi(G, c) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_k + \beta_k b_k = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{m} \overline{\gamma_k} c_k.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1544.2011) и РФФИ (проект 12-01-31495).